Fodor Géza matematikus, egyetemi tanár emlékére

Rábai Imre

1. Egy téglalap oldalai 15,6 és 18 egység hosszúak. Írjunk a téglalapba olyan téglalapot, amelynek egyik oldala a másik oldal háromszorosa és az adott téglalap minden oldalára pontosan egy csúcsa illeszkedik a beírt téglalapnak. Mekkorák a beírt téglalap oldalai?

2. *a*) Igazoljuk, hogy minden háromszögben $\operatorname{ctg}\alpha \sin\gamma + \cos\gamma = \dfrac{b}{a}$, ahol α az a, γ a c oldallal szemközti szög.
b) Egy háromszögben $b = 2a$ és $\gamma = 60^\circ$. Számítsuk ki a háromszög másik két szögét!

3. Az (a_n) mértani sorozat tagjaira $a_1 + a_3 + a_5 = 133$ és $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_3} + \dfrac{1}{a_5} = \dfrac{133}{1296}$. Írjuk fel a sorozat első öt tagját!

4. Egy bankba 3 évre elhelyeztünk 40 000 forintot kamatos kamatra. Az első évben a bank 10%-os kamatot számolt el, a második évben a kamatlábat p%-kal növelte, a harmadik évben újabb p%-kal növelte. Ily módon a harmadik év végén 2939,20 Ft-tal többet fizettek ki, mint amennyit a három éven át a 10%-os kamatláb mellett kellett volna. Számítsuk ki p értékét!

5. Az (x, y) síkbeli $ABCD$ négyszög A csúcsa az origóban van, B csúcsa az y tengelyen, C csúcsa az első síknegyedben, D csúcsa az x tengely pozitív felén helyezkedik el. A BC oldal egyenesének egyenlete: $2x+y = 12$. A CD oldal merőleges a BC oldalra. A négyszög területe 31 területegység. Határozzuk meg a B, C és D csúcspontok koordinátáit!

6. Egy forgáscsonkakúp alap-, illetve fedőkörének sugara R illetve r $(R > r)$. Egy, az alapokkal párhuzamos sík két olyan részre osztja a csonkakúpot, hogy a nagyobb sugarú résznél keletkező csonkakúp térfogata harmada az eredeti csonkakúp térfogatának. Fejezzük ki R-rel és r-rel a síkmetszet sugarát!

7. Igazoljuk, hogy a $\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) \cdot \cos 4x = 2$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

8. Tekintsük a $4^x + 2(n+1) \cdot 2^x + n^2 = 8$ egyenletet, ahol az n paraméter egész szám $(n \in \mathbb{Z})$.
a) Milyen n esetén van az egyenletnek két különböző megoldása a valós számok halmazán?
b) Milyen n esetén van az egyenletnek pontosan egy megoldása?
Adjuk meg a lehetséges gyökök értékét is!