

1. Az eredeti kérdés

A KöMaL 2001/7. szám 407. oldalán kitűzött feladat így szólt:

B. 3438. Az $f(x, y, z)$ függvényre teljesül, hogy bármely t valós számra

$$f(x + t, y + t, z + t) = t + f(x, y, z)$$

$$(1) \quad f(tx, ty, tz) = t \cdot f(x, y, z)$$

$$f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(x, z, y)$$

Mennyi $f(2000, 2001, 2002)$?

Tűzzük ki célul a feladatbeli függvényegyenlet-rendszer megoldását, azaz valamennyi, a fenti előírásnak eleget tevő függvény meghatározását. Ehhez először a háromváltozós függvényről szóló kérdést egyváltozós függvény keresésére vezetjük vissza.

Az első két egyenletből kapjuk, hogy

$$f(0, 0, 0) = 0 \cdot f(0, 0, 0) = 0,$$

$$f(x, x, x) = x + f(0, 0, 0) = x,$$

valamint $x \neq y$ esetén

$$f(x, y, z) = x + f(0, y - x, z - x) = x + (y - x)f\left(0, 1, \frac{z - x}{y - x}\right).$$

Vezessük most be az egyváltozós g függvényt a következőképpen: legyen $g(t) = f(0, 1, t)$; ekkor az előző összefüggés

$$f(x, y, z) = x + (y - x) \cdot g\left(\frac{z - x}{y - x}\right)$$

alakba írható. Vegyük figyelembe, hogy $f(x, y, z)$ értéke nem függ az x, y, z változók sorrendjétől. Így az x és y felcserélésével azt kapjuk, hogy

$$f(x, y, z) = f(y, x, z) = y + (x - y) \cdot g\left(\frac{z - y}{x - y}\right).$$

A két utóbbi összefüggés jobb oldalai egyenlők; legyen ($x \neq y$ esetén) $t = \frac{z - x}{y - x}$, ekkor $1 - t = \frac{z - y}{x - y}$, tehát

$$x + (y - x)g(t) = y + (x - y)g(1 - t),$$

$$g(t) + g(1 - t) = \frac{y - x}{y - x} = 1.$$

Hasonlóan kapjuk $f(x, y, z) = f(x, z, y)$ figyelembevételével, hogy $x \neq z$ esetén

$$x + (y - x) \cdot g(t) = f(x, y, z) = f(x, z, y) = x + (z - x)g\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$g(t) = t \cdot g\left(\frac{1}{t}\right).$$

A g függvény tehát kielégíti a

$$g(t) + g(1 - t) = 1 \quad (\text{minden } t \in \mathbb{R}),$$

$$(2) \quad g(t) = t \cdot g\left(\frac{1}{t}\right) \quad (\text{minden } 0 \neq t \in \mathbb{R})$$

egyenleteket. Vegyük észre, hogy másrészt g – mint láttuk – meghatározza f -et:

$$(3) \quad f(x, y, z) = \begin{cases} x + (y - x) \cdot g\left(\frac{z - x}{y - x}\right), & \text{ha } x \neq y \\ x + (z - x) \cdot g\left(\frac{y - x}{z - x}\right), & \text{ha } x \neq z \\ x, & \text{ha } x = y = z, \end{cases}$$

és könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy *tetszőleges* g függvény kielégíti a (2) összefüggéseket, akkor a (3) szerint belőle (vissza)kapott f teljesíti (1)-et. (Nem okoz ellentmondást az, ahogy $y \neq x \neq z$ esetén $f(x, y, z)$ értékét eredetileg értelmeztük, mivel a (2) teljesülése miatt ezek ugyanazt adják.) Ezek szerint a továbbiakban elegendő a (2) követelményt teljesítő g függvényeket meghatározni. Előbb azonban következzenek egy kis kitérő.

2. Transzformációcsoportok

Legyen H egy halmaz, és tegyük fel, hogy értelmezett rajta egy (pl. „szorzással” vagy az elemek pusztán egymás után írásával jelölt) *művelet*: minden $a, b \in H$ -ra $a \cdot b$ (egyszerűbben: ab) is egy jól meghatározott eleme a H -nak. Tegyük fel, hogy van olyan e elem a H -ban, hogy minden $a \in H$ -ra $ea = ae = a$ teljesül; ilyenkor azt mondjuk, hogy e *egységelem*e a H -nak. Tételezzük fel továbbá, hogy a H minden c eleméhez létezik olyan c' elem, amelyre $cc' = c'c = e$; az ilyen c' elemet a c *inverzének* hívjuk. Ha mindezeket túl a H -n értelmezett művelet még *asszociatív* is, azaz teljesíti (minden $a, b, c \in H$ -ra) az $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ azonosságot, akkor azt mondjuk, hogy H *csoport erre a műveletre*.

A csoportok nagyon sok helyen fordulnak elő a matematikában; már tanulmányaink legelején is találkozhatunk velük, hiszen például az egész számok halmaza csoport az egész számok összeadásának műveletére. Ugyanígy csoportot alkotnak a nemnulla valós számok a valós számok szorzására, stb. Ezeknél a „számtanos” példáknál azonban sokkal fontosabb és jellemzőbb példa csoportra az, amikor a csoport elemei nem számok, hanem egy halmaz bizonyos tulajdonságú *leképezései*, a köztük értelmezett művelet pedig a leképezések egymás után alkalmazása, azaz *kompozíciója*.

1. példa. Legyen X tetszőleges halmaz, és jelölje H az összes $X \rightarrow X$ *bijektív* leképezések halmazát. (Egy $f: X \rightarrow X$ leképezés bijektív, ha minden $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$, valamint az X halmaz minden eleme az f -nél vett képe egy-egy alkalmas X -beli elemnek: (minden $x \in X$) (van olyan $y \in X$) $f(y) = x$. Mivel az f különböző elemeket különböző elemekbe képez, azért látható, hogy minden $x \in X$ -hez *pontosan egy* olyan $y \in X$ található, amelyre $f(y) = x$.) Könnyen látható, hogy két bijektív leképezésnek a kompozíciója is bijektív, és az is egyszerűen igazolható, hogy a leképezések kompozíciója asszociatív művelet. Jelölje ε az X halmaz identikus leképezését ($(\forall x \in X) \varepsilon(x) = x$); ekkor tetszőleges $f: X \rightarrow X$ leképezésre és $x \in X$ -re

$$\varepsilon(f(x)) = f(x) = f(\varepsilon(x)),$$

azaz $\varepsilon \circ f = f \circ \varepsilon = f$. Ez azt jelenti, hogy ε egységelem a H -nak a kompozíció ($\circ$ -rel jelölt) műveletére. Végül, ha $f: X \rightarrow X$ bijektív leképezés, akkor definiáljuk az f' leképezést X -en a következőképpen: minden $x \in X$ -hez van pontosan egy olyan $y \in X$, amelyre $f(y) = x$; legyen $f'(x) = y$. Ebből egyszerűen belátható, hogy $f \circ f' = \varepsilon = f' \circ f$, vagyis f' az f inverze, és f' is bijektív. Tehát H csoport a kompozíció műveletére.

2. példa. Tekintsük a következő függvényeket: $\varepsilon: x \mapsto x$, $\sigma: x \mapsto 1 - x$, $\theta: x \mapsto \frac{1}{x}$, $\alpha: x \mapsto \frac{x-1}{x}$, $\beta: x \mapsto \frac{x}{x-1}$, $\gamma: x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Ekkor

$$\sigma \circ \theta: x \mapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

így $\sigma \circ \theta = \alpha$. Hasonlóan például

$$\beta \circ \beta: x \mapsto \frac{\beta(x)}{\beta(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x,$$

tehát $\beta \circ \beta = \varepsilon$. Folytatva ezt a számolást belátható, hogy a $G = \{\varepsilon, \theta, \sigma, \alpha, \beta, \gamma\}$ halmazba tartozó bármely két függvény kompozíciója is a G -hez tartozik. A számolás eredményeit a következő „szorzótábla” foglalja össze (bekereteztük a két, imént részletezett „szorzás” eredményét).

$\circ$	ε	θ	σ	α	β	γ
ε	ε	θ	σ	α	β	γ
θ	θ	ε	γ	β	α	σ
σ	σ	α	ε	θ	γ	β
α	α	σ	β	γ	θ	ε
β	β	γ	α	σ	ε	θ
γ	γ	β	θ	ε	σ	α

Mivel leképezések kompozíciója asszociatív, azért a kompozíció a G halmazon is asszociatív művelet. Egységelem is van, az ε . A táblázatból leolvasható, hogy α és γ egymás inverzei, míg ε , θ , σ és β önmaguk inverzei; tehát G csoport a függvénykompozíció (az összetett függvény képzése) műveletére.

3. Orbit és transzverzális. Tegyük föl, hogy X egy halmaz, és H az X bizonyos, önmagára történő leképezéseinek a halmaza úgy, hogy e leképezések csoportot alkotnak a kompozíció műveletére; tegyük fel továbbá azt is, hogy H egységeleme az ε identikus leképezés (ez mindkét példánkban teljesült). Jelölje x az X halmaz tetszőleges elemét. Az x *orbitjának* nevezzük az X azon elemeinek az összességét, amelyeket megkaphatunk x -nek valamelyik H -beli leképezésnél vett képeként; ez éppen az $\{\eta(x) \mid \eta \in H\}$ halmaz.

Mit mondhatunk két orbit viszonyáról? Tekintsük ehhez két tetszőleges elem, x és y orbitját. Ha ezeknek nincs közös elemük, akkor persze y nem eleme az x orbitjának, csakúgy, mint x sem az y -énak. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor nincs olyan H -beli leképezés, amely x -et y -ba képezné, és olyan sem, ami az y -t képezné x -be. A másik lehetséges eset az, hogy x és y orbitjának létezik közös eleme, pl. z . Ekkor van olyan η_1 és $\eta_2 \in H$, hogy $\eta_1(x) = z$, $\eta_2(y) = z$. Jelölje η_2 inverzét az η' ; ekkor $y = \varepsilon(y) = \eta'(\eta_2(y)) = \eta'(z)$, így $\eta'(\eta_1(x)) = \eta'(z) = y$, azaz $\eta' \circ \eta_1$ az x -et y -ba képezi: y tehát benne van az x orbitjában. Ekkor azonban az y orbitja:

$$\begin{aligned} \{\xi(y) \mid \xi \in H\} &= \{\xi([\eta' \circ \eta_1](x)) \mid \xi \in H\} = \{[\xi \circ \eta' \circ \eta_1](x) \mid \xi \in H\} \subseteq \\ &\subseteq \{\zeta(x) \mid \zeta \in H\}. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy y orbitja része az x orbitjának. Ugyanígy látható be az is, hogy az x orbitja része az y orbitjának, tehát a két orbit egyenlő. Ezzel beláttuk, hogy *két orbit vagy egyenlő egymással, vagy diszjunktak*.

Egy, az orbitához szorosan kapcsolódó fogalom a transzverzális. Az X egy részhalmazát *transzverzálisnak* nevezzük, ha minden orbitból pontosan egy elemet tartalmaz.

Nézzük meg, mik az orbitok és a transzverzálisok két korábbi példánkban. Az első példában egyetlen orbit van: maga az egész X halmaz, hiszen minden $x, y \in X$ -re van (általában nem is egy) olyan bijektív leképezés, ami x -et y -ba képezi. Így az X bármelyik eleme egy transzverzális.

Sokkal érdekesebb a 2. példa esete. Ha r egy valós szám, és mind a hat G -beli függvény értelmezve van r -ben, akkor r orbitja, $\{h(r) \mid h \in G\}$ legfeljebb hat számból áll. Mivel minden olyan valós szám, amin G elemei értelmezettek eleme egy orbitnak, az orbitok száma ezúttal végtelen. (A 0 és az 1 az a két szám, ahol függvényeink némelyike nincs értelmezve; ezeket egyelőre figyelmen kívül hagyjuk.)

Megmutatjuk, hogy ha a G -beli függvényeket csak a 0-tól és 1-től különböző valós számokon értelmezzük, akkor a $[2, +\infty)$ félegyenes pontjai transzverzalist alkotnak. Ehhez tekintsük a következő, egyszerűen belátható egyenlőtlenségeket:

$$r > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(r) = 1 - r < -1 \Rightarrow \sigma((2, +\infty)) = (-\infty, -1) \\ -1 < \gamma(r) = \frac{1}{1-r} < 0 \Rightarrow \gamma((2, +\infty)) = (-1, 0) \\ 0 < \theta(r) = \frac{1}{r} < \frac{1}{2} \Rightarrow \theta((2, +\infty)) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} < \alpha(r) = \frac{r-1}{r} < 1 \Rightarrow \alpha((2, +\infty)) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ 1 < \beta(r) = \frac{r}{r-1} < 2 \Rightarrow \beta((2, +\infty)) = (1, 2). \end{cases}$$

Leolvasható, hogy minden, a 0-tól, 1-től, (-1) -től, $\frac{1}{2}$ -től és 2-től különböző szám előáll pontosan egy $(2, +\infty)$ -beli számnak (pontosan) egy G -beli függvény szerinti értékeként. Mivel a kimaradt $-1, \frac{1}{2}, 2$ számok egy orbitot alkotnak (ez az egyetlen háromelemű orbit), beláttuk, hogy $[2, +\infty)$ valóban transzverzális.

3. A függvényegyenletek megoldása

Fogalmazzuk meg a (2)-ben szereplő egyenleteket a G csoportot alkotó függvényeknek a nyelvén: az első egyenlet azt jelenti, hogy

$$(4) \quad g(\sigma(t)) = \sigma(g(t)) = 1 - g(t),$$

a második pedig azt, hogy

$$(5) \quad g(\theta(t)) = \frac{g(t)}{t}.$$

A G -beli művelet segítségével (4)–(5) következményeként kapjuk, hogy

$$(6) \quad g(\alpha(t)) = g(\sigma(\theta(t))) = \sigma(g(\theta(t))) = 1 - \frac{g(t)}{t},$$

$$(7) \quad g(\beta(t)) = g(\theta(\alpha(t))) = \frac{g(\alpha(t))}{\alpha(t)} = \frac{1 - \frac{g(t)}{t}}{\frac{t-1}{t}} = \frac{t - g(t)}{t-1},$$

$$(8) \quad g(\gamma(t)) = g(\theta(\sigma(t))) = \frac{g(\sigma(t))}{\sigma(t)} = \frac{1 - g(t)}{1 - t}.$$

A g -re megkövetelt egyenletek tehát kizárólag az azonos orbithoz tartozó helyeken fölvetett értékekre írnak elő bizonyos összefüggéseket. Másrészt az is kiderült, hogy ha ismerjük a g függvény értékét egy $t \neq 0, 1$ helyen, akkor ez (4-8) alapján már egyértelműen meghatározza a g értékét a t orbitjába tartozó helyeken. Az előző részben láttuk, hogy ha $r \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$, akkor pontosan egy olyan $t \in (2, +\infty)$ és $\eta \in G$ létezik, amelyre $r = \eta(t)$. Tehát g értékeit tetszés szerint megadhatjuk a $(2, +\infty)$ félegyenesen, ezekből (4)–(8) szerint ellentmondástól mentesen megkapjuk g értékeit mindenhol, kivéve a $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ helyeket. Az így kapott függvényre – megadásának módjából következően – nyilvánvalóan teljesülnek a (4)–(8) összefüggések, tehát az ezekkel ekvivalens (2) egyenletek is. A $\left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ orbit valamelyik helyén, pl. 2-ben azonban már nem írható elő tetszés szerint a g értéke. Ennek az az oka, hogy $\beta(2) = 2$, így, ha $g(2) = s$, akkor (7) szerint

$$s = g(2) = g(\beta(2)) = \frac{2 - g(2)}{2 - 1} = 2 - s,$$

amiből $g(2) = s = 1$, így (5) és (8) szerint

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = g(\theta(2)) = \frac{g(2)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{és} \quad g(-1) = g(\gamma(2)) = \frac{1 - g(2)}{1 - 2} = 0.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezekkel az értékekkel már teljesül (2) a $t = -1, \frac{1}{2}, 2$ helyeken is. A még fennmaradt $t = 0, 1$ helyeken a (2) követelmény csupán $g(0) + g(1) = 1$ teljesülését kívánja, ezért ha egy tetszés szerint megválasztott v számmal $g(0) = v$, akkor $g(1) = 1 - v$ megfelelő.

A (2) egyenletrendszer megoldása tehát a következő. Legyen h tetszőleges, a $(2, +\infty)$ félegyenesen értelmezett függvény, v pedig valós szám. Ekkor, a G szorzótábláját is felhasználva:

$$g(t) = \begin{cases} g(\sigma(\sigma(t))) = 1 - g(\sigma(t)) = 1 - h(1 - t), & \text{ha } t < -1 \\ 0, & \text{ha } t = -1 \\ g(\gamma(\alpha(t))) = \frac{1 - g(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} = \frac{1 - h(\frac{t-1}{t})}{1 - \frac{t-1}{t}} = t - t \cdot h\left(\frac{t-1}{t}\right), & \text{ha } -1 < t < 0 \\ v, & \text{ha } t = 0 \\ g(\theta(\theta(t))) = \frac{g(\theta(t))}{\theta(t)} = \frac{h(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = t \cdot h\left(\frac{1}{t}\right), & \text{ha } 0 < t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } t = \frac{1}{2} \\ g(\alpha(\gamma(t))) = 1 - \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} = 1 - \frac{h(\frac{1}{1-t})}{\frac{1}{1-t}} = 1 + (t-1) \cdot h\left(\frac{1}{1-t}\right), & \text{ha } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 1 - v, & \text{ha } t = 1 \\ g(\beta(\beta(t))) = \frac{\beta(t) - g(\beta(t))}{\beta(t) - 1} = \frac{\frac{t}{t-1} - h(\frac{t}{t-1})}{\frac{t}{t-1} - 1} = t + (1-t) \cdot h\left(\frac{t}{t-1}\right), & \text{ha } 1 < t < 2 \\ 1, & \text{ha } t = 2 \\ h(t), & \text{ha } t > 2. \end{cases}$$

Az eredeti feladatban szereplő f függvényt innen a (3) szerint kaphatjuk meg.