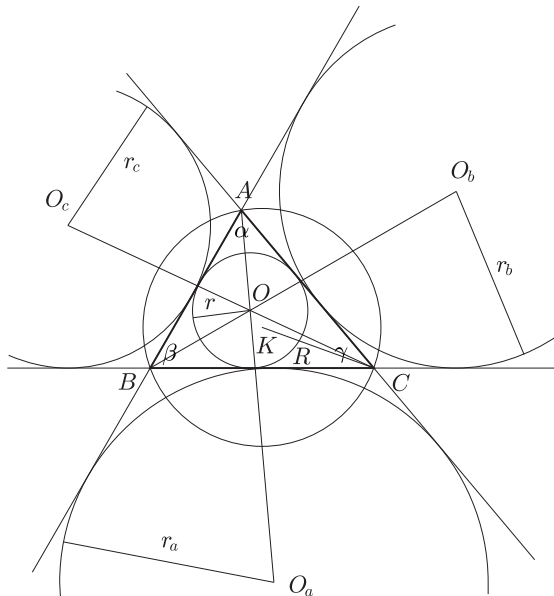


A lapunkban megjelenő feladatok mintamegoldásainak írása közben sokszor jelent problémát annak eldöntése, hogy egy állítás közismert-e, s ezért nem kell bizonyítani, vagy pedig nem az, és ezért a bizonyítását is le kell írni. Különösen így volt ez a **B. 3478.** feladatnál, amit nagyon sokféleképpen lehetett megoldani.

E cikknek az a célja, hogy a háromszögekkel kapcsolatos néhány állítás egyszerű bizonyításait összegyűjtse. A háromszögekkel kapcsolatban rengeteg tétel van, mi csak azokkal foglalkozunk, amelyek kapcsolódnak a háromszöghöz tartozó körökhöz. Ezeknek is csak egy részét ismertetjük, egyáltalán nem foglalkozunk pl. a *Feuerbach körrel*. Az érdeklődő olvasó további szép tételeket találhat az irodalomjegyzékben szereplő könyvekben.

A háromszögben a három oldal, csúcs, szög stb. szerepe szimmetrikus. Ezért állításainkban és bizonyításainkban a rövideg kedvéért sokszor csak $a, A, \alpha, \dots$ szerepel. Ezeket persze úgy kell érteni, hogy a háromszög tetszőleges oldalára, csúcsára, szögére igaz a megfelelő állítás.

Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C , oldalai a, b, c , szögei α, β, γ , a szokásos jelölésekkel a háromszög területét jelölje T , kerületét $2s$, a beírt kör sugara legyen r , a hozzáírt körök sugarai r_a, r_b, r_c , a háromszög köré írt kör sugara R , végül ezen körök középpontjai legyenek rendre O, O_a, O_b, O_c és K (1. ábra).

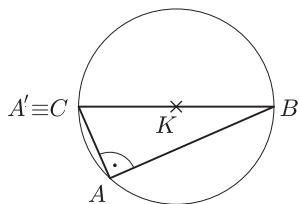


1. ábra

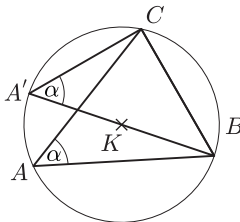
Első állításunkat *általánosított szinusztételnek* is szokás nevezni.

1. állítás.
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$$

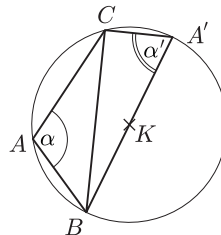
Bizonyítás. Messe a háromszög köré írt körének BK átmérője a kört másodszor az A' pontban. Ekkor $BA' = 2R$. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $A' \equiv C$, az állítás nyilvánvaló (2/1. ábra). Ha α nem derékszög, akkor $BA'C \sphericalangle = \alpha$ (2/2. ábra), vagy $BA'C \sphericalangle = \alpha' = 180^\circ - \alpha$ (2/3. ábra), de felhasználva a $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ összefüggést, valamint azt, hogy a $BA'C$ háromszög C -nél lévő szöge Thalész tétele miatt derékszög, mindig teljesül, hogy $\sin \alpha = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R}$.



2/1. ábra



2/2. ábra



2/3. ábra

2. állítás.
$$R = \frac{abc}{4T}.$$

Bizonyítás. Az ismert területképlet szerint $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$. Ezért ha az előző állításban belátott $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ összefüggés jobb oldalán lévő törtet $b \cdot c$ -vel bővítjük, akkor éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

Ha a $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$ területképletben az oldalakat kifejezzük az 1. állításból adódó $2R \sin \beta$ -val, illetve $2R \sin \gamma$ -val, akkor a következőt kapjuk:

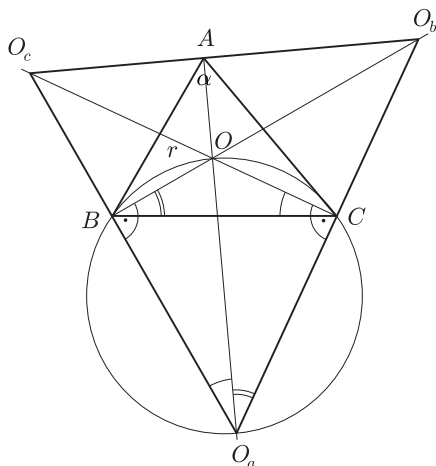
3. állítás. $T = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

Tudjuk, hogy O a háromszög három belső szögfelezőjének, O_a , O_b és O_c pedig két-két külső- és egy-egy belső szögfelezőjének a metszéspontja. Mivel a háromszög bármely csúcsához tartozó külső és belső szögfelező merőleges egymásra, ezért igaz a következő:

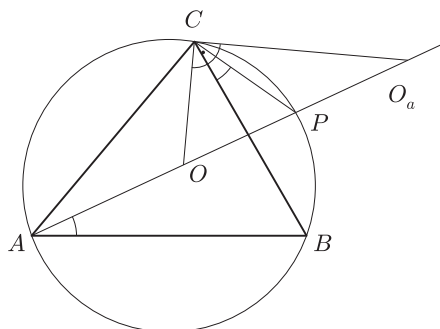
4. állítás. Az $O_a O_b O_c$ háromszög magasságpontja O , magasságvonalai pedig megegyeznek az ABC háromszög belső szögfelezőivel.

Ebből következik, hogy az OBO_aC négyszög húrnégyszög, mert B -nél és C -nél lévő szögei egyaránt derékszögek. A négyszöget az OO_a átló két közös átfogójú derékszögű háromszögre bontja, ezért a négyszög köré írható kör középpontja az OO_a szakasz felezőpontja. A négyszög köré írt kört megrajzolva (3. ábra) látszik, hogy $\angle OCB = \angle OO_aB$ és $\angle OBC = \angle OO_aC$, mert az egy íven nyugvó kerületi szögek egyenlőek. Vagyis $\angle BO_aC = \angle OO_aB + \angle OO_aC = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$. Ezzel bebizonyítottuk a következőt:

5. állítás. Az $O_a O_b O_c$ háromszög szögei rendre: $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ és $\frac{\alpha + \beta}{2}$.



3. ábra



4. ábra

Következő állításunk az eddigieknél kevésbé ismert (bár megtalálható a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* kötetben).

6. állítás. A háromszög köré írható kör felezi a beírható kör középpontját a hozzáírható körök középpontjaival összekötő szakaszokat.

Bizonyítás. Messe a köré írható kör az OO_a szakaszt P -ben (4. ábra). (Mivel $\angle CO_aB = \frac{\beta + \gamma}{2} < 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle CAB$, ezért O_a a köré írható körön kívül helyezkedik el, vagyis P mindig létrejön.) Ekkor $\angle PCB = \angle PAB$, mert mindkettő a PB ívhez tartozó kerületi szög. Ezért $\angle PCO = \angle PCB + \angle BCO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Az OCO_a háromszögben C -nél derékszög van, az O_a -nál lévő szögről már láttuk, hogy $\frac{\beta}{2}$, ezért az O -nál lévő szög $90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Vagyis $\angle POC = \angle PCO$, tehát a POC háromszög egyenlő szárú, $PO = PC$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $PO = PB$. Ez azt jelenti, hogy az OBC háromszög köré írható kör középpontja P . Ez a kör azonban megegyezik az OBO_aC húrnégyszög köré írható körrel, hiszen mindkét sokszögnek csúcsa O , B és C . Azt viszont a 4. állítás után beláttuk, hogy az OBO_aC köré írható kör középpontja az OO_a szakasz felezőpontja. Tehát P felezi OO_a -t.

7. állítás. A hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög köré írható körének sugara $2R$.

Bizonyítás. Ha az O pontból kétszeresére nagyítjuk a köré írható kört, akkor a keletkezett $2R$ sugarú kör az 5. állítás miatt átmegy az O_a , O_b és O_c pontok mindegyikén (5. ábra).

Bizonyítás. Az ABC háromszög területe megegyezik az OAB , OBC és OCA háromszögek területének összegével. E három háromszög O -hoz tartozó magasságai r hosszúak, így területeik rendre $\frac{c \cdot r}{2}$, $\frac{a \cdot r}{2}$ és $\frac{b \cdot r}{2}$. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $T = r \cdot s$.

A hozzáírt kör esetén azt kell felhasználnunk, hogy az ABC háromszög területe megegyezik az O_aAB és O_aCA háromszögek területei összegének és az O_aBC háromszög területének különbségével, azaz

$$T = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} = r_a(s - a).$$

9. állítás. A beírt kör sugarának reciproka megegyezik a hozzáírt körök sugarának reciprokösszegével.

Bizonyítás. A 8. állítás szerint

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{s-a}{T} + \frac{s-b}{T} + \frac{s-c}{T} = \frac{3s - (a+b+c)}{T} = \frac{s}{T} = \frac{1}{r}.$$

10. állítás (Héron képlete). $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Bizonyítás. A 6. ábrán látható OBF és BO_aI háromszögek hasonlóak, mert F -nél illetve I -nél derékszögük van, a külső és a belső szögfelezők merőlegessége miatt pedig $OBF \sphericalangle$ és $BO_aI \sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Ezért a két háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{OF}{FB} = \frac{BI}{IO_a}.$$

Ezt (1), (2) és a 8. állítás felhasználásával átalakítva:

$$\frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a}, \quad \text{azaz} \quad (s-b)(s-c) = r \cdot r_a = \frac{T}{s} \cdot \frac{T}{s-a},$$

amiből $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ adódik.

11. állítás. $4R = r_a + r_b + r_c - r$.

Bizonyítás. A 2. és a 8. állítás alapján elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$(3) \quad \frac{abc}{T} = \frac{T}{s-a} + \frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c} - \frac{T}{s}.$$

Mindkét oldalt T -vel szorozva és felhasználva Héron képletét:

$$(4) \quad abc = s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c).$$

Ez az egyenlőség a jobb oldal átalakításával könnyen belátható:

$$\begin{aligned} & [s - (s-a)](s-b)(s-c) + s(s-a)[(s-c) + (s-b)] = \\ & = a \cdot \frac{1}{4}(a^2 - (b-c)^2) + \frac{1}{4}((b+c)^2 - a^2) \cdot a = \frac{1}{4}a \cdot 4bc = abc. \end{aligned}$$

Vagyis (4), s így a vele ekvivalens (3) is igaz.

12. állítás. A háromszög köré írható kör sugara legalább kétszerese a beírható kör sugarának.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $R \geq 2r$, vagyis a 2. és 8. állításokat felhasználva azt, hogy

$$(5) \quad \frac{abc}{4T} \geq 2 \cdot \frac{T}{s}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $T/2$ -vel, alkalmazzuk Héron képletét és egyszerűsítsünk a jobb oldalon s -sel:

$$\frac{abc}{8} \geq (s-a)(s-b)(s-c).$$

Írjuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget az (1) összefüggéseket felhasználva az x, y, z változókra:

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{8} \geq x \cdot y \cdot z.$$

Ez viszont azonnal adódik a számtani és mértani közepek közti

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx} \quad \text{és} \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

egyenlőtlenségek összeszorzásából. Ezért az ezzel ekvivalens (5) egyenlőtlenség is teljesül. Az is látható, hogy egyenlőség csak akkor van, ha $x = y = z$, azaz ha a háromszög szabályos.

Héron képletét valamint a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$(6) \quad T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^3 = s \cdot \frac{s^3}{27} = \frac{s^4}{27}.$$

Vagyis minden háromszögben igaz, hogy $12\sqrt{3} \leq \frac{(2s)^2}{T}$, azaz a kerület négyzetének és a területnek a hányadosa alulról korlátos. Ez a tört minimális értékét akkor veszi fel, ha (6)-ban egyenlőség van, tehát amikor a háromszög szabályos. Ebből azonnal adódik a következő két, szélsőértékekre vonatkozó állítás.

13. állítás. *Adott területű háromszögek közül a szabályosnak a legkisebb a kerülete.*

14. állítás. *Adott kerületű háromszögek közül a szabályosnak a legnagyobb a területe.*

A továbbiakban a háromszög szögeinek és felszögeinek szögfüggvényeit fejezzük ki az oldalakkal majd ezeknek a képleteknek néhány alkalmazását mutatjuk meg.

15. állítás.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Bizonyítás. A 6. ábrán látható AFO derékszögű háromszög A -nál lévő szöge $\frac{\alpha}{2}$. Ezért a 8. állítást, Héron képletét és (1)-et felhasználva:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AF} = \frac{r}{x} = \frac{T}{sx} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Az AFO háromszögben Pitagorasz tétele szerint

$$\begin{aligned} AO^2 &= AF^2 + OF^2 = (s-a)^2 + \frac{T^2}{s^2} = \frac{s-a}{s} [s(s-a) + (s-b)(s-c)] = \\ &= \frac{s-a}{4s} [(b+c)^2 - a^2] + (a^2 - (b-c)^2) = bc \frac{s-a}{s}. \end{aligned}$$

Ennek ismeretében a tangenshez hasonlóan kifejezhetjük $\frac{\alpha}{2}$ szinuszt és koszinuszt is:

$$(7) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AO} = \frac{T}{s \cdot AO} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s \cdot \sqrt{bc \frac{s-a}{s}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$(8) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AO} = \frac{s-a}{\sqrt{bc \frac{s-a}{s}}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Ezekből a $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ és a $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ trigonometrikus azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\sin \alpha = 2 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2T}{bc},$$

ami az ismert területképlet átrendezett alakja, valamint hogy

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{s(s-a)}{bc} - \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{1}{4bc} [(b+c)^2 - a^2 - (a^2 - (b-c)^2)] = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{ami a koszinusztétel egy átrendezett alakja.} \end{aligned}$$

A tangenseket (feltéve, hogy a szög nem derékszög), a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ azonosság alapján kifejezve egy kevésbé ismert összefüggést kapunk:

$$(9) \quad 4T = \operatorname{tg} \alpha (b^2 + c^2 - a^2) = \operatorname{tg} \beta (a^2 + c^2 - b^2) = \operatorname{tg} \gamma (a^2 + b^2 - c^2).$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4T} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4T} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4T} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4T}.$$

Következő állításunk már nem ilyen nyilvánvaló.

16. állítás. Ha a háromszög nem derékszögű, akkor

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Bizonyítás. Felhasználva (9)-et, azt kell megmutatnunk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{4T}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{4T}{a^2 - b^2 + c^2} + \frac{4T}{a^2 + b^2 - c^2} = \\ & = \frac{64T^3}{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Ha a háromszög nem derékszögű, akkor ez ekvivalens a nevezőkkel való szorzás és $4T$ -vel való osztás után kapott

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) = 16T^2$$

összefüggéssel. A jobb oldalra beírva Héron képletét és mindkét oldalt rendezve:

$$(a^2 + b^2 - c^2) \cdot 2c^2 + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) = [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2].$$

Átalakítva:

$$\begin{aligned} & 2c^2[(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)] + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 - c^2) = \\ & = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc), \\ & 4b^2c^2 + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 - c^2) = \\ & (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 - c^2) + 2bc[(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 - b^2 - c^2)] + 4b^2c^2. \end{aligned}$$

Ez az azonosság bizonyítja állításunkat.

A 15. állítást, a (7) és (8) képleteket (és megfelelőiket $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ szögfüggvényeire) valamint Héron képletét felhasználva triviális számolással kapjuk a következő azonosságokat.

17. állítás.

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{T}{s^2}, \\ & \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{s^2}{T}, \\ & \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{T^2}{s \cdot abc}, \\ & \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{s \cdot T}{abc}, \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva sok egyenlőtlenség könnyen belátható, ezek közül egyet mutatunk meg példaként.

18. állítás. $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Bizonyítás. A 17. állítás alapján elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{T^2}{s \cdot abc} \leq \frac{1}{8}, \quad \text{azaz} \quad \frac{T^2}{s} \leq \frac{abc}{8}.$$

Héron képletét felhasználva ez $(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{abc}{8}$ alakba is írható. Ezt az egyenlőtlenséget viszont már beláttuk a 12. állítás bizonyítása során.

Irodalom

[1] Coxeter, H. S. M.: *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Reiman I.: *A geometria és határterületei*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.