1. *Az a, b, c, x, y, z valós számokra* $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ *és* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. *Mennyi* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ *értéke?*

Megoldás. $a,b,c,x,y,z\neq 0$. Alkalmazzuk pl. az $u=\frac{x}{a}$, $v=\frac{y}{b}$, $w=\frac{z}{c}$ helyettesítést; ekkor a két egyenlet $u+v+w=1$ és $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$ alakba írható, s $u^2+v^2+w^2$ értéke a kérdés. $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{uv+vw+uw}{uvw}=0$ miatt $uv+vw+uw=0$; az $(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+uw)$ átalakításból kapjuk, hogy $u^2+v^2+w^2=1$.

Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni, léteznek-e egyáltalán a feladat feltételeinek megfelelő u, v, w számok.
Mivel $u+v=1-w$ és $uv=-w(u+v)=-w(1-w)=w^2-w$, így a $t^2+(w-1)t+w^2-w=0$ egyenlet két gyöke $t_1=u$ és $t_2=v$. (A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján.) Az egyenlet diszkriminánsa

$$D=(w-1)^2-4(w^2-w)=(w-1)(-3w-1)=-3(w-1)\left(w+\frac{1}{3}\right);\quad -\frac{1}{3}\le w\le 1$$

esetén $D\ge 0$, tehát találhatók megfelelő u, v számok. Például $w=-\frac{1}{3}$, $u=v=\frac{2}{3}$ megfelelő.

2. *Oldjuk meg a* $4\cdot\log_x 2=7+2\cdot\log_2 x$ *egyenletet a valós számok halmazán!*

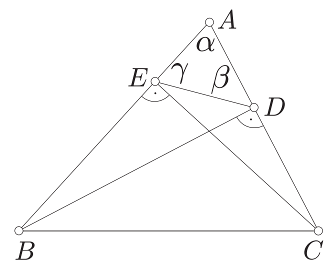
Megoldás. Az egyenlet alaphalmaza $x>0$, $x\neq 1$. Áttérve azonos alapú logaritmusokra: $4\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 x}=7+2\cdot\log_2 x$. Az $a=\log_2 x$ helyettesítéssel egyenletünk $\frac{4}{a}=7+2a$ alakú lesz, melyet átalakítva a $2a^2+7a-4=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=-4$; visszahelyettesítve x-re $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=2^{-4}=\frac{1}{16}$. Mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

3. *Az* $x^3+x^2-14x+m=0$ *egyenlet egyik gyöke* 3. *Határozzuk meg az* m *valós paraméter és a másik két gyök értékét!*

Megoldás. Az $x_1=3$ helyettesítés után $3^3+3^2-14\cdot 3+m=0$, innen $m=6$. Az $x-3$ gyöktényezőt kiemelve $x^3+x^2-14x+6=(x-3)(x^2+4x-2)=0$. A második tényező zérushelyei $x_2=-2+\sqrt{6}$, ill. $x_3=-2-\sqrt{6}$.

4. *Az ABC háromszögben a B csúcsból húzott magasságvonal az AC egyenest a D pontban, a C-ből húzott magasságvonal az AB egyenest az E pontban metszi. Mekkora a DE szakasz hossza, ha* $CAB\sphericalangle=70^\circ$, $AB=12$ cm, $AC=10$ cm?

Megoldás. Jelöljük az adott háromszög A, B, C csúcsnál lévő szögeit hagyományosan α, β, γ-val, az AB, BC, AC oldalak hosszát c, a, b-vel; így $\alpha=70^\circ$, $c=12$ cm, $b=10$ cm.
Készítsünk ábrát!



Észrevehetjük, hogy $BCDE$ húrnégyszög, hiszen a BC oldal E-ből és D-ből is 90° alatt látszik. (A négyszög köré írt kör középpontja a BC oldal felezőpontja.) A húrnégyszögek szemközti szögeinek összege 180°, ezért $BED\sphericalangle=180^\circ-\gamma$, s így $DEA\sphericalangle=\gamma$ (ábra). Hasonlóan kapjuk, hogy $EDA\sphericalangle=\beta$. Az ABC és ADE háromszögek tehát hasonlók, mert szögeik megegyeznek. A megfelelő oldalak arányát felírva $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$, s mivel az AEC derékszögű háromszögből $\frac{AE}{AC}=\cos\alpha$, $DE=BC\cdot\cos\alpha=a\cdot\cos\alpha$.
A háromszög $BC=a$ oldalát a koszinusz-tétel felhasználásával számíthatjuk ki:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha=100+144-2\cdot 10\cdot 12\cdot\cos 70^\circ,$$

$a\approx 12{,}72$ cm, s innen $DE=a\cdot\cos\alpha\approx 4{,}35$ cm.

Megjegyzés. A három magasságvonal talppontja (ábránkon kettőt jelöltünk: D és E) meghatározza az ún. talpponti háromszöget. Meggondolásainkból következik, hogy hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög kerülete $a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma$.

5. *Oldjuk meg a* $\cos(2x)-3\cos x+2\le 0$ *egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!*

Megoldás. Felhasználva a $\cos 2x$-re vonatkozó addíciós tételt és a trigonometria alapegyenletét: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$. Visszahelyettesítés után az eredeti egyenlőtlenség $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \le 0$ alakú lesz, s ez a $\cos x$ változóban másodfokú. A két zérushely $(\cos x)_1 = 1$, $(\cos x)_2 = \dfrac{1}{2}$; a bal oldalt eszerint szorzattá alakítva kapjuk, hogy $2(\cos x - 1)\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) \le 0$. Ennek megoldása $\dfrac{1}{2} \le \cos x \le 1$. A $\cos x \le 1$ egyenlőtlenség minden valós számra igaz, $\dfrac{1}{2} \le \cos x$ pedig akkor teljesül, ha $-\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \le x \le \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. Ez tehát a feladat megoldása.

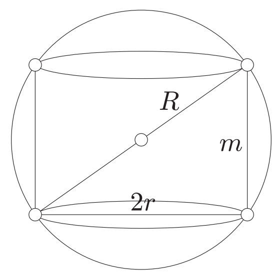
6. *Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám adható meg úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?*

Megoldás. Némi próbálkozás után találhatunk négy ilyen számot (pl. a 7, 11, 13, 23 vagy 19, 23, 37, 41 számnégyes megfelelő), de ötöt nem sikerül. Megmutatjuk, hogy öt egész szám közül mindig kiválasztható három, melyek összege osztható 3-mal (s mivel összegük 3-nál nagyobb, nem prím).

Az egész számok 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adnak. Ha azonos maradékosztályból választunk ki három számot, ezek összege osztható lesz 3-mal, így egy-egy maradékosztályból legfeljebb két számot választhatunk ki. Ugyanakkor három különböző maradékú szám összege is osztható 3-mal, ezért csak két maradékosztályból választhatunk ki számokat.

Azt kaptuk, hogy legfeljebb két maradékosztályból, legfeljebb két-két számot, vagyis összesen legfeljebb négy számot választhatunk ki, ha azt akarjuk, hogy közülük semelyik három összege se legyen osztható 3-mal; a feladat feltételeinek megfelelően tehát legfeljebb 4 szám adható meg.

7. *Az R sugarú gömbbe írt egyenes körhengerek közül melyik henger térfogata maximális? Mekkora a térfogat lehető legnagyobb értéke?*



Megoldás. A beírt henger térfogata csak akkor lehet maximális, ha tengelye átmegy a gömb középpontján, s alap- és fedőkörének kerülete a gömb felületén van. Jelöljük a henger alapkörének sugarát r-rel, magasságát m-mel, s tekintsük a tengelyen átmenő síkmetszetet!

A $2R$, $2r$, m oldalú derékszögű háromszögből kapjuk a $4R^2 = 4r^2 + m^2$ összefüggést, s ezen feltétel mellett kell $V = r^2\pi m$ maximumát meghatároznunk. r^2-et kiküszöbölve $4V = (4R^2 - m^2)\pi m$. Emeljük négyzetre az egyenletet, hogy a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazni tudjuk. (Szabad négyzetre emelni: a tényezők pozitívak, s $(4V)^2$ ugyanott lesz maximális, ahol $4V$.)

$$16V^2 = (4R^2 - m^2)^2\pi^2 m^2, \qquad \frac{32V^2}{\pi^2} = (4R^2 - m^2)^2 \cdot 2m^2.$$

Ha most írjuk föl a $(4R^2 - m^2)$, $(4R^2 - m^2)$, $2m^2$ pozitív számokra a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget, akkor a számtani közép állandó:

$$\sqrt[3]{(4R^2 - m^2)(4R^2 - m^2) \cdot 2m^2} \le \frac{(4R^2 - m^2) + (4R^2 - m^2) + 2m^2}{3}, \tag{1}$$

ahonnan $\sqrt[3]{\dfrac{32V^2}{\pi^2}} \le \dfrac{8R^2}{3}$, $\dfrac{32V^2}{\pi^2} \le \dfrac{512R^6}{27}$, $V^2 \le \dfrac{16\pi^2 R^6}{27}$, $V \le \dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

A henger térfogata legfeljebb $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ lehet (ez a gömb térfogatának $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ része). A lehető legnagyobb érték akkor érhető el, ha az (1) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő tagok egyenlőek, vagyis $4R^2 - m^2 = 2m^2$. Mivel $4R^2 = 4r^2 + m^2$, innen $m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R$ és $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$.

8. *Adott az $y = x^2$ parabola és az $A(9, 8)$ pont. A parabola mely P pontjába húzott érintőjére igaz, hogy ez az érintő merőleges az AP egyenesre?*

Megoldás. Legyen a P futópont koordinátája $(p; p^2)$, a P pontba húzott érintő meredeksége m. Ekkor az érintő egyenlete $e\colon y - p^2 = m(x-p)$. Mivel e érinti a parabolát, az egyenes és a parabola közös pontjait adó $y = x^2$, $y - p^2 = m(x-p)$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. (Az y tengellyel párhuzamos egyenest kizártuk.)

Az egyenletrendszerből $x^2 - mx - p^2 + pm = 0$ egyenlet adódik x-re. Egy megoldást akkor kaphatunk, ha a diszkrimináns nulla: $m^2 + 4p^2 - 4pm = 0$, $(m-2p)^2 = 0$, vagyis $m = 2p$.

Tehát az $y = x^2$ parabola tetszőleges $P(p; p^2)$ pontjába húzott érintő meredeksége $2p$.

Az érintő egy irányvektora $\mathbf{v}(1; 2p)$, ez a feladat szerint merőleges az $\overrightarrow{AP}$ vektorra. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{A} = (p; p^2) - (9; 8) = (p-9; p^2-8)$. Két vektor merőlegességét legegyszerűbben a skalárszorzatuk segítségével írhatjuk fel: $\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

$$\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AP} = (1; 2p) \cdot (p-9; p^2-8) = p - 9 + 2p^3 - 16p,$$

átrendezés után a $2p^3 - 15p - 9 = 0$ harmadfokú egyenletet kapjuk.

Észrevehetjük, hogy $p = 3$ gyöke az egyenletnek. A $(p-3)$ gyöktényezőt kiemelve $2p^3 - 15p - 9 = (p-3)(2p^2 + 6p + 3)$. A $2p^2 + 6p + 3 = 0$ egyenlet további gyökei $p_1 = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$ $(\approx -0{,}63)$ és $p_2 = \dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}$ $(\approx -2{,}37)$.

Tehát három megfelelő P pontot kaptunk: $P_1(3; 9)$, $P_2(-0{,}63; 0{,}40)$, $P_3(-2{,}37; 6{,}00)$.