

A1. Tekintsünk egy S halmazt és a halmazon egy kétváltozós $*$ műveletet (ami azt jelenti, hogy bármely két S -beli a, b esetén $a * b$ is S -beli). Tegyük föl, hogy $(a * b) * a = b$ teljesül minden S -beli a, b -re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a * (b * a) = b$ is teljesül minden S -beli a, b -re.

A2. Adottak az $E_1, E_2, \dots, E_n$ érmék. Egyikük sem igazságos, a k -adikon a fej dobásának a valószínűsége $\frac{1}{2k+1}$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az n darab érmét feldobva páratlan számú fejet kapunk? A választ adjuk meg az n racionális függvényeként.

A3. Adott m egész számra tekintsük a $P_m(x) = x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2$ polinomot. Az m milyen értékeire bomlik $P_m(x)$ két nem-konstans egész együtthatós polinom szorzatára?

A4. Az ABC háromszög területe egységnyi. Az E, F és a G pontok rendre a BC, CA , illetve AB oldalakon vannak úgy, hogy AE az R pontban felezi BF -et, BF az S pontban felezi CG -t, végül CG a T pontban felezi AE -t. Mekkora az RST háromszög területe?

A5. Bizonyítsuk be, hogy az $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$ egyenlőség pontosan egy pozitív egész a, n számpárra teljesül.

A6. Lehet-e egy egységnyi sugarú kör belsejében lévő parabolaív hossza 4 egységnél nagyobb?

B1. Legyen n pozitív páros szám. Írjuk az $1, 2, \dots, n^2$ számokat egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe úgy, hogy a táblázat k -edik sorában az elemek balról jobbra olvasva rendre

$$(k-1)n+1, \quad (k-1)n+2, \quad \dots, \quad (k-1)n+n$$

legyenek $(k=1, 2, \dots, n)$.

Színezzük ki az így kitöltött táblázat mezőit piros és fekete színnel úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a mezők fele piros, a másik fele pedig fekete legyen. (A sakktábla-szerű színezés például egy lehetőség.) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen színezésre a piros és a fekete mezőkön lévő számok összege egyenlő.

B2. Melyek azok az (x, y) valós számok, amelyekre teljesül az alábbi egyenletrendszer?

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} &= (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} &= 2(y^4 - x^4). \end{aligned}$$

B3. Tetszőleges pozitív egész n számra jelölje $\langle n \rangle$ a $\sqrt{n}$ -hez legközelebb eső egész számot. Mennyi a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n}$$

összeg értéke?

B4. Jelölje S a $-1, 0, 1$ számoktól különböző racionális számok halmazát és legyen $f: S \rightarrow S$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Bizonyítsuk be, vagy cáfoljuk meg, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S) = \emptyset$, ahol $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$.

B5. Legyenek a és b valós számok a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumban, a g pedig olyan valós értékű függvény, amelyre $g(g(x)) = ag(x) + bx$ minden valós x -re. Bizonyítsuk be, hogy valamilyen c konstanssal $g(x) = cx$.

B6. Legyen az $(a_n)_{n \geq 1}$ pozitív tagú szigorúan monoton növekvő sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Van-e ekkor végtelen sok pozitív egész n , amelyre teljesül, hogy $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$, ha $i = 1, 2, \dots, n-1$?