

1. Adott a síkon $3n-1$ pont, közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy található közöttük $2n$ pont, melyek konvex burka nem háromszög.

I. Megoldás. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló, $n > 1$ esetén pedig ekvivalens azzal, hogy található $2n$ pont, melyek konvex burkának legalább 4 csúcsa van. Ha találunk $m \geq 2n$ pontot, melyek konvex burkának legalább 4 csúcsa van, azok közül már könnyűszerrel elhagyhatunk $m - 2n$ pontot úgy, hogy a megmaradók konvex burkának még mindig legalább 4 csúcsa legyen.

Ha a pontok $\mathcal{P}$ halmazának konvex burka nem háromszög, akkor a fenti megjegyzés értelmében készen is vagyunk. Feltehető tehát, hogy $\mathcal{P}$ konvex burka egy $A_1B_1C_1$ háromszög. Tegyük fel, hogy valamely $i < n$ esetén az $A_1, \dots, A_i$ pontokat már definiáltuk úgy, hogy minden $j \leq i$ esetén a $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \dots, A_{j-1}\}$ ponthalmaz konvex burka éppen az $A_jB_1C_1$ háromszög. A $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \dots, A_i\}$ halmaznak legalább $2n$ pontja van, ezért az előbbi megállapításunkhoz hasonlóan feltehetjük, hogy e halmaz konvex burka is egy háromszög. Ennek két csúcsa nyilván B_1 és C_1 , a harmadikat jelöljük A_{i+1} -gyel.

Megállapíthatjuk tehát, hogy ha nem található a pontok között $2n$ olyan, melyek konvex burka nem háromszög, akkor létezik egy $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontsorozat $\mathcal{P}$ -ben úgy, hogy minden $i \leq n$ esetén $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \dots, A_{i-1}\}$ konvex burka az $A_iB_1C_1$ háromszög. Hasonlóan készíthetjük el a $B_1, B_2, \dots, B_n$ és $C_1, C_2, \dots, C_n$ pontsorozatokat is. Az így kapott $3n$ pont között kell legyen kettő olyan, amelyik egybeesik. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A_j = B_k$. Ekkor a

$$\mathcal{P} \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \setminus \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \setminus \{C_1\}$$

ponthalmaznak legalább $n - 1 \geq 1$ pontja van, és mindegyik belső pontja mind az $A_jB_1C_1$, mind a $B_kA_1C_1$ háromszögnek. Ez azonban lehetetlen, hiszen a két háromszögnek nincs közös belső pontja. Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

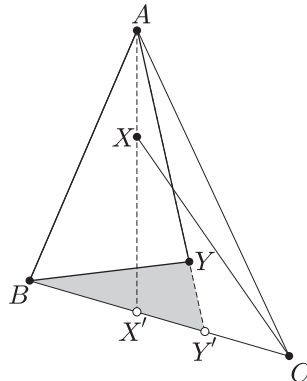
Megjegyzések. 1. Nem nehéz megmutatni, hogy a feladatban $3n - 1$ helyébe $3n - 2$ már nem írható. Valóban, legyen $A_1B_1C_1$ egy szabályos háromszög, melynek középpontja O , és legyen A, B, C rendre az OA_1, OB_1 és OC_1 szakaszok felezőpontja. Legyen k_A, k_B és k_C egy-egy R sugarú körív, mely az A_1 és A, B_1 és B , illetve C_1 és C pontokat köti össze. Vegyük fel a k_A, k_B, k_C íveken az $A_2, \dots, A_n, B_2, \dots, B_{n-1}$ és $C_2, \dots, C_{n-1}$ pontokat. Ha $n \geq 2$ és R elég nagy, akkor a $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ $3n - 2$ elemű ponthalmazból nem választható ki $2n$ pont, melyek konvex burka nem háromszög. Ha ugyanis R elég nagy, akkor minden A_iA_j egyenes elválasztja egymástól a B_k és C_l pontokat. Ha tehát $\mathcal{P}$ egy részhalmaza konvex burkának csúcsa az A_i és A_j pont is, akkor az $A_1, \dots, A_n$ pontokon kívül legfeljebb $n - 1$ további pontot tartalmazhat, tehát legfeljebb $2n - 1$ pontja lehet. Hasonlóképpen okoskodhatunk akkor is, ha a konvex burok a B_i vagy a C_i pontok közül tartalmaz legalább kettőt csúcsként. Következésképpen $\mathcal{P}$ minden $2n$ elemű részhalmazának konvex burka mind az A_i , mind a B_i és úgyszintén a C_i pontok közül is csak egyet tartalmazhat csúcsként, és így szükségképpen háromszög lesz.

2. Jelölje $\lceil x \rceil$ az x valós szám felső egész részét, vagyis az x -nél nem kisebb egész számok közül a legkisebbet. Megmutatható, hogy az alábbi erősebb állítás is igaz.

Tegyük fel, hogy $n \neq 3$, és adott a síkon $\lceil 3n/2 \rceil - 1$ pont, melyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Ekkor található közöttük n pont, melyek konvex burka nem háromszög.

A következőkben erre az állításra adunk még két bizonyítást. Jegyezzük meg, hogy a feltételnek csak akkor van értelme, ha n pozitív egész szám, és hogy $n \leq 2$ esetén az állítás nyilván igaz. Ennek megfelelően a megoldások során feltesszük, hogy $n > 3$ egész számot jelöl. Páratlan n esetén a fenti konstrukció apró módosításával ellenőrizhetjük azt is, hogy ha a pontok száma $\lceil 3n/2 \rceil - 2$, akkor az állítás már nem marad igaz.

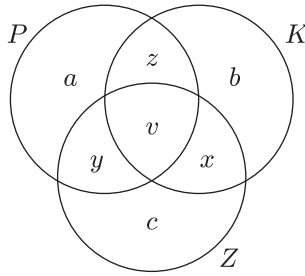
II. Megoldás. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}$ legalább $\lceil 3n/2 \rceil - 1$ elemű általános helyzetű ponthalmaz nem tartalmaz n pontot, melyek konvex burka nem háromszög. Legyen $\mathcal{P}$ konvex burka az ABC háromszög, és legyen $A_1 = A$. Az első megoldásban ismertetett módon készítsük el az $A_1, A_2, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil}$ sorozatot úgy, hogy minden $i \leq \lceil n/2 \rceil$ esetén $\mathcal{P} \setminus \{A_1, \dots, A_{i-1}\}$ konvex burka az A_iBC háromszög legyen.



Rendezzük sorba az $A_2, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil}$ pontokat az A -ból nézve pozitív irányban, és jelölje közülük a két szélsőt X és Y . Az AX és AY egyenesek BC szakasszal alkotott metszéspontját jelölje X' és Y' . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a B, X', Y', C pontok ebben a sorrendben követik egymást a BC egyenesen. A BCX és BCY

háromszögek közül valamelyik tartalmazza a másikat. Ezek közül a kisebbik, melyet lefed a BYY' és CXX' háromszögek egyesítése, tartalmazza a $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil}, B, C\}$ legalább $n - 3$ elemű ponthalmazt. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathcal{P}'$ pontjainak legalább a fele a BYY' háromszögbe esik (ábra). Válasszunk ki ezek közül $\lceil (n-3)/2 \rceil$ pontot, ezek halmazát jelölje $\mathcal{P}''$. Tekintsük végül a $\mathcal{Q} = \mathcal{P}'' \cup \{A_1, A_2, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil}, B\}$ halmazt. $\mathcal{Q}$ -nak $\lceil (n-3)/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil + 1 = n$ eleme van, és minden eleme az $AY'B$ háromszögbe, vagy annak határára esik. Ezért az A, Y, B pontok a $\mathcal{Q}$ halmaz konvex burkán helyezkednek el. A konvex buroknak tartalmaznia kell továbbá a $\mathcal{P}''$ halmaznak legalább egy pontját is, ami ellentmond az indirekt feltevésünknek.

III. Megoldás. (Ez a megoldás *Lippner Gábor*tól származik.) Akárcsak az első megoldásban, most is feltehetjük, hogy a pontok konvex burka egy ABC háromszög. Két olyan pontot, mely a háromszög belsejében fekszik, kössünk össze egy piros, kék vagy zöld színű szakasszal aszerint, hogy az általuk meghatározott egyenes a háromszög három oldala közül melyiket nem metszi: az AB , a BC vagy a CA oldalt. Jelölje rendre P, K és Z azon pontok halmazát, melyekből indul ki piros, kék, illetve zöld színű szakasz. Az $n \geq 4$ feltevés miatt az ABC háromszög belsejében legalább 2 pont helyezkedik el, és ezért a $P \cup K \cup Z$ halmaz megegyezik a háromszög belsejében lévő pontok halmazával, tehát $\lceil 3n/2 \rceil - 4$ eleme van. Megmutatjuk, hogy a P, K, Z halmazok valamelyikének az elemszáma legalább $n - 2$. Ennek igazolásához készítsük el a halmazok Venn-diagrammját, ahol az egyes betűk a megfelelő részhalmazok elemszámát jelölik.



Ha mondjuk $a \neq 0$, akkor van olyan pont a háromszög belsejében, amelyet minden további ponttal piros színű szakasz köt össze, ekkor tehát

$$|P| = \lceil 3n/2 \rceil - 4 \geq n - 2,$$

hiszen $n \geq 4$. Feltehetjük tehát, hogy $a = b = c = 0$. Ez azt jelenti, hogy $|P \cup K \cup Y| = x + y + y + v$. Ha most $|P| = y + z + v$, $|K| = z + x + v$ és $|Z| = x + y + v$ mindegyike kisebb lenne, mint $n - 2$, akkor összegzés után a

$$3n - 8 \leq 2(\lceil 3n/2 \rceil - 4) = 2(x + y + z + v) \leq |P| + |K| + |Z| \leq 3(n - 3) = 3n - 9$$

egyenlőtlenséghez jutnánk, ami lehetetlen.

Valóban igaz tehát, hogy valamelyik halmaz elemszáma legalább $n - 2$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $|P| \geq n - 2 \geq 2$. Tekintsük a $P' = P \cup \{A, B\}$ legalább n elemű halmazt, ennek konvex burka tartalmazza az A és B csúcsoakat. Legyen $D \in P$, és tekintsük P -nek egy olyan E pontját, melyre a DE szakasz piros. Mivel a DE egyenes nem metszi az AB szakaszt, az E pont nem lehet az ABD háromszög belsejében. Ezért P' konvex burka nem lehet háromszög. Már csak annyit kell megjegyeznünk, hogy ekkor P' -ből kiválasztható egy $n \geq 4$ elemű részhalmaz, melynek konvex burka szintén nem háromszög.

2. Legyen $k \geq 3$ egész szám, $n > \binom{k}{3}$. Bizonyítandó, hogy ha a_i, b_i, c_i ($1 \leq i \leq n$) $3n$ darab különböző valós szám,

akkor az $a_i + b_i, a_i + c_i, b_i + c_i$ számok között legalább $k + 1$ különböző szám található. Mutassuk meg, hogy $n = \binom{k}{3}$ esetén az állítás nem feltétlenül igaz.

I. Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis az $a_i + b_i, a_i + c_i, b_i + c_i$ számok között legfeljebb k különböző szám található, ezek halmazát jelölje T . Világos, hogy minden $1 \leq i \leq n$ esetén az $a_i + b_i, a_i + c_i, b_i + c_i$ számok páronként különbözők, vagyis T -nek egy 3-elemű részhalmazát alkotják. Továbbá, ha $a_i + b_i = x, a_i + c_i = y$ és $b_i + c_i = z$, akkor $a_i = (x + y - z)/2, b_i = (x + z - y)/2$ és $c_i = (y + z - x)/2$. Az $\{x, y, z\}$ halmaz ismeretében az $\{a_i, b_i, c_i\}$ halmaz tehát egyértelműen meghatározható. Minthogy

$$\binom{|T|}{3} \leq \binom{k}{3} < n,$$

léteznek $1 \leq i < j \leq n$ indexek úgy, hogy $\{a_i, b_i, c_i\} = \{a_j, b_j, c_j\}$, ami azonban lehetetlen.

A második állítás bizonyításához tekintsük a $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ halmazt, ahol $t_i = 4^i$. Legyen $n = \binom{k}{3}$, és jelölje $T_1, T_2, \dots, T_n$ a T halmaz 3-elemű részhalmazait. Ha $T_i = \{4^u, 4^v, 4^w\}$, ahol $1 \leq u < v < w \leq k$ egész számok, akkor legyen $a_i = (4^u + 4^v - 4^w)/2, b_i = (4^u + 4^w - 4^v)/2$ és $c_i = (4^v + 4^w - 4^u)/2$, ekkor nyilván $a_i + b_i, a_i + c_i, b_i + c_i \in T$. Ezért elegendő megmutatni, hogy az a_i, b_i, c_i ($1 \leq i \leq n$) számok mind különbözők.

$a_i = b_j$ vagy $a_i = c_j$ semmilyen i, j esetén nem állhat fenn, hiszen az a_i számok mind negatívak, míg a b_j, c_j számok mind pozitívak. Az sem lehet, hogy $b_i = c_j$, hiszen a b_i számok mindegyike valamelyik $(2^{2s-2}, 2^{2s-1})$ alakú intervallumba esik, míg a c_i számok mindegyike valamelyik $(2^{2s-1}, 2^{2s})$ alakú intervallumba esik, ahol $3 \leq s \leq k$ egész szám.

Legyen most $T_i = \{4^u, 4^v, 4^w\}$ és $T_j = \{4^x, 4^y, 4^z\}$, ahol $1 \leq u < v < w \leq k$ és $1 \leq x < y < z \leq k$ egész számok. Tegyük fel, hogy $c_i = c_j$, ekkor

$$4^v + 4^w - 4^u = 4^y + 4^z - 4^x.$$

Mivel $4^w < 4^v + 4^w - 4^u < 4^{w+1}$ és $4^z < 4^y + 4^z - 4^x < 4^{z+1}$, ez csak úgy lehet, ha $w = z$, következésképpen $4^v - 4^u = 4^y - 4^x$. Itt $4^{v-1} < 4^v - 4^u < 4^v$ és $4^{y-1} < 4^y - 4^x < 4^y$, ezért az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $v = y$, és ekkor szükségképpen $u = x, i = j$ is igaz. A c_i számok tehát mind különbözők.

Ugyanilyen gondolatmenettel megállapíthatjuk azt is, hogy mind az a_i számok, mind a b_i számok különbözők, amivel a bizonyítás végére értünk.

II. Megoldás. A feladat első részére mutatunk egy másik indoklást, ez *Kiss Demetertől* származik. Tegyük fel ismét, hogy az állítással ellentétben a $3n$ összeg között legfeljebb k különböző szám található. Ekkor ezek közül valamelyik, jelöljük ezt a -val, legalább $\frac{3n}{k} > \binom{k-1}{2}$ alkalommal fordul elő. Ha valamilyen i -re az $a_i + b_i, b_i + c_i$ és $a_i + c_i$ összegek közül kettő is egyenlő lenne a -val, akkor az a_i, b_i, c_i számok között lenne két megegyező. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük tehát, hogy minden $1 \leq i \leq \binom{k-1}{2} + 1$ esetén az $a_i + b_i, b_i + c_i$ és $a_i + c_i$ összegek közül pontosan egy lesz a -val egyenlő. Az ezen összegek közül fennmaradó $2 \left(\binom{k-1}{2} + 1 \right)$ összeg most már csak $k-1$ különböző értéket vehet fel, van tehát egy olyan érték, jelöljük ezt b -vel, amely legalább

$$2 \left(\binom{k-1}{2} + 1 \right) / (k-1) > k-2$$

alkalommal fordul elő. Az előző okoskodáshoz hasonlóan tehát feltehetjük, hogy minden $1 \leq i \leq k-1$ esetén az $a_i + b_i, b_i + c_i$ és $a_i + c_i$ összegek közül az egyik a -val, egy másik pedig b -vel egyenlő. A még megmaradó $k-1$ összeg pedig már csak legfeljebb $k-2$ különböző értéket vehet fel, lesz tehát köztük kettő, amelyik megegyezik. Ekkor azonban az ezekhez tartozó a_i, b_i, c_i számhármassok is megegyeznek, mely ellentmondás bizonyítja az állítást.

A továbbiakban a feladat második részére mutatunk több megoldást.

III. Megoldás. Tekintsük a $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ halmazt, ahol $t_i = 3^i$. Legyen $\{x, y, z\}$ és $\{u, v, w\}$ az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaz két 3-elemű részhalmaza. Az I. megoldáshoz hasonlóan, annyit kell csak megmutatnunk, hogy ha

$$\frac{3^x + 3^y - 3^z}{2} = \frac{3^u + 3^v - 3^w}{2},$$

akkor a két részhalmaz szükségképpen megegyezik, és $z = w$. Valóban, ekkor $3^x + 3^y + 3^w = 3^u + 3^v + 3^z = A$. Ha az A számot hármasszámrendszerben írjuk fel, akkor annak 0-tól különböző számjegyei között vagy három 1-es, vagy egy 1-es és egy 2-es számjegy szerepel, hiszen $x = y = w$ nem lehetséges. A felírás egyértelműsége miatt az első esetben $\{x, y, w\}$ és $\{u, v, z\}$ az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaznak ugyanaz a 3-elemű részhalmaza. Mivel $x, y \neq z$, ebből $w = z$, majd $\{x, y\} = \{u, v\}$ is következik, ahogyan azt bizonyítani kívántuk. A második esetben azt kapnánk, hogy $\{x, y, w\}$ és $\{u, v, z\}$ az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaznak ugyanaz a 2-elemű részhalmaza. Mivel $x \neq y$, ez meg kellene egyezzen az $\{x, y\}$ halmazzal, ahonnan $z \in \{x, y\}$ következne, ami nem lehetséges.

IV. Megoldás. Ahogyan azt az eddigi megoldások is sugallják, elegendő azt megmutatni, hogy minden k pozitív egész esetén létezik egy olyan $T_k = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ halmaz, melyre $t_x + t_y + t_z = t_u + t_v + t_w$ akkor és csak akkor teljesül, ha az x, y, z számok valamilyen sorrendben megegyeznek az u, v, w számokkal. Valóban, ekkor nem nehéz megmutatni, hogy a $(t_x + t_y - t_z)/2$ alakban felírható $3 \binom{k}{3}$ szám (ahol $\{x, y, z\}$ az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaz tetszőleges 3-elemű részhalmaza) mind különböző.

Ha $k = 1$ akkor a $t_1 = 1$ választás nyilván megfelelő. Elegendő megmutatni azt, hogy létezik olyan végtelen $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ sorozat, hogy minden $i \geq 2$ esetén t_i nem írható fel $r_1 t_1 + \dots + r_{i-1} t_{i-1}$ alakban, ahol $r_1, \dots, r_{i-1}$ racionális számok. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik ilyen sorozat, tekintsük a T_k halmazt, és tegyük fel, hogy $t_x + t_y + t_z = t_u + t_v + t_w$ teljesül valamilyen $1 \leq x, y, z, u, v, w \leq k$ esetén. Legyen i az x, y, z, u, v, w indexek között előforduló legnagyobb szám. Ha most t_i nem ugyanannyiszor szerepelne az egyenlőség két oldalán, akkor átrendezés után egy $t_i = r_1 t_1 + \dots + r_{i-1} t_{i-1}$ alakú egyenlőséghez jutnánk. Ezért i ugyanannyiszor szerepel az x, y, z számok között, mint az u, v, w számok között. Mindkét oldalról elhagyva a t_i -vel egyenlő tagokat, és az előbbi lépést megismételve végül azt kapjuk, hogy az x, y, z számok valamilyen sorrendben valóban megegyeznek az u, v, w számokkal.

Tegyük fel tehát, hogy $k > 1$, és a $t_1, \dots, t_{k-1}$ számokat már meghatároztuk a fenti kíváncságnak megfelelően. Ekkor az $r_1 t_1 + \dots + r_{k-1} t_{k-1}$ alakban felírható számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, míg az összes valós szám

halmaza nem az, létezik tehát olyan t_k valós szám, mely nem írható fel $r_1 t_1 + \dots + r_{k-1} t_{k-1}$ alakban. Ezért a kívánt tulajdonságú sorozat létezése azonnal következik a teljes indukció elvéből.

Megjegyzések. 1. Az előző megoldásban nem konstruktív módon igazoltuk egy alkalmas $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ sorozat létezését. Megmutatható, hogy például a $t_i = \sqrt{p_i}$ választással, ahol p_i az i -edik pozitív prímszámot jelöli, megfelelő sorozathoz jutunk. Ennek bizonyítása azonban már túl messzire vezetne.

2. Ahogyan azt *Kocsis Albert Tihamér* észrevette, a feladat átalánosítható a következő módon. Legyenek $k \geq t \geq 3$ egész számok, $n > \binom{k}{t}$. Ha $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{it}$ ($1 \leq i \leq n$) tn különböző valós szám, akkor a $\sum_{i=1}^t a_i - a_k$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq t$) számok között legalább $k+1$ különböző szám található, $n = \binom{k}{t}$ esetén pedig ez nem mindig van így. Ennek igazolását az olvasó könnyen elvégezheti, nincsen szükség hozzá alapvetően új gondolatra.

3. Merőben más a helyzet, ha kéttagú összegeknél maradunk. Világos, hogy ha $k \geq 3$ egész szám, $n > \binom{k}{3}$, és a_i, b_i, c_i, d_i ($1 \leq i \leq n$) $4n$ különböző valós szám, akkor az $a_i + b_i, a_i + c_i, a_i + d_i, b_i + c_i, b_i + d_i, c_i + d_i$ összegek között legalább $k+1$ különböző szám található. Meglepő módon ez az állítás lényegesen nem javítható. Érdemes elgondolkozni a következő feladaton: minden $k \geq 3$ egész számra létezik $4\binom{k}{3}$ különböző valós szám, a_i, b_i, c_i, d_i ($1 \leq i \leq \binom{k}{3}$) úgy, hogy az $a_i + b_i, a_i + c_i, a_i + d_i, b_i + c_i, b_i + d_i, c_i + d_i$ összegek között legfeljebb $2k$ különböző szám található.

3. Egy négyzetrácsban tekintsünk egy adott háromszöghöz hasonló legkisebb területű rácsháromszöget. Bizonyítsuk, hogy körülírt körének középpontja nem rácspont.

I. Megoldás. (*Gerencsér Balázs* megoldása.) Tekintsünk egy olyan rácsháromszöget, melynek körülírt körének középpontja is rácspont. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az egyik csúcspont (A) az origó. Legyenek a másik két csúcs koordinátái $B = (a, b)$ és $C = (c, d)$, a körülírt kör középpontjává pedig $O = (x, y)$.

Az OA és OB szakaszok egyenlőségéből a Pitagorasz tétel alapján nyerjük, hogy $x^2 + y^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2$, ahonnan leolvasható, hogy $a^2 + b^2$, és így $a+b$ és $a-b$ is páros számok. Hasonlóképpen kapjuk, hogy $c+d$ és $c-d$ is páros számok.

Tekintsük most az $A_1 B_1 C_1$ rácsháromszöget, ahol

$$A_1 = A, \quad B_1 = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \right) \quad \text{és} \quad C_1 = \left(\frac{c+d}{2}, \frac{c-d}{2} \right).$$

Ebben a háromszögben

$$\begin{aligned} \overline{A_1 B_1}^2 &= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{\overline{AB}^2}{2}, \\ \overline{A_1 C_1}^2 &= \left(\frac{c+d}{2} \right)^2 + \left(\frac{c-d}{2} \right)^2 = \frac{c^2 + d^2}{2} = \frac{\overline{AC}^2}{2} \end{aligned}$$

és

$$\overline{B_1 C_1}^2 = \left(\frac{a+b-c-d}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b-c+d}{2} \right)^2 = \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{2} = \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

Az $A_1 B_1 C_1$ háromszög oldalai tehát rendre megegyeznek az ABC háromszög megfelelő oldalainak $\sqrt{2}$ -ed részével, a két háromszög ennek megfelelően hasonló. Ilyen módon találtunk egy, az ABC háromszöghöz hasonló, annál kisebb területű rácsháromszöget. Ez bizonyítja az állítást.

II. Megoldás. Tegyük fel, hogy egy H rácsháromszög körülírt körének O középpontja is rácspont. Legyenek az egyik oldalvektor koordinátái (x, y) , az O pontból a szóban forgó oldal csúcsaiba mutató vektorok koordinátái pedig (a, b) , illetve (c, d) . Ekkor a, b, c, d, x, y egész számok, melyekre a Pitagorasz tétel alapján

$$x^2 + y^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2(ac + bd)$$

teljesül. Mivel $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ (a körülírt kör sugarának négyzete), $x^2 + y^2$, és így $(x+y)^2$ is páros szám. Következésképpen $x+y$ és $x-y$ is páros számok.

Ha az (x, y) vektort az origó körül 45° -os szöggel elforgatjuk pozitív irányba, akkor az $\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)$ vektort kapjuk, ezt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányban nagyítva pedig az $\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$ vektorhoz jutunk, melynek mindkét koordinátája egész szám.

Megállapíthatjuk tehát, hogy H -t bármely csúcsa körüli 45° -os szöggel történő $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú forgatva nyújtás egy hozzá hasonló, ám nála kisebb rácsháromszögbe viszi. Ez bizonyítja az állítást.

Megjegyzés. Bontsunk fel egy húsokszöget valamely csúcsából induló átlóinak segítségével háromszögekre. Mivel ezen háromszögek körülírt köreinek ugyanaz a középpontja, ez a megoldás mutatja azt is, hogy a feladat állítása háromszög helyett tetszőleges húsokszögre is igaz.