

1. A háromszög középvonalára vonatkozó tétel alkalmazásával adódik, hogy a négyszög átlóinak hossza 12 egység, az átlók szöge 30° , így a négyszög területe

$$T = \frac{12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ}{2}, \quad T = 36 \text{ területegység.}$$

(Végtelen sok ilyen négyszög létezik.)

2. Az egyenlőtlenségben szereplő kifejezések akkor értelmezettek, ha

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad -2x^2 - 2x + 4 > 0 \quad \text{és} \quad 4 - 3x > 0.$$

Ez akkor teljesül, ha $0 < x < 1$.

Mivel a logaritmus alapszáma 0 és 1 között változik és a logaritmusfüggvény minden ilyen alapszáma szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$-2x^2 - 2x + 4 \leq 4 - 3x, \quad \text{azaz} \quad 2x \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai: $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

3. A feltételek és a koszinusztétel alkalmazásával $(a^2 + b^2 - c_1^2) + 2ab = 2ab - \sqrt{2}ab$, $(a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma_1)) = 2ab - \sqrt{2}ab$, ahonnan $\cos \gamma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma_1 = 135^\circ$, illetve $c_2^2 - (a^2 + b^2 - 2ab) = 2ab + \sqrt{2}ab$, $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma_2 - a^2 - b^2 + 2ab = 2ab + \sqrt{2}ab$, ahonnan $\cos \gamma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma_2 = 135^\circ$, tehát $\gamma_1 = \gamma_2$, $c_1 = c_2$, a két háromszög egybevágó, így természetesen a területük egyenlő.

4. Vegyük észre, hogy

$$x + 4 + 2\sqrt{x+3} = (x+3) + 2\sqrt{x+3} + 1 = (\sqrt{x+3} + 1)^2$$

és

$$2x + 3 - 4\sqrt{2x-1} = (2x-1) - 4\sqrt{2x-1} + 4 = (\sqrt{2x-1} - 2)^2,$$

tehát

$$|\sqrt{x+3} + 1| - |\sqrt{2x-1} - 2| = 3,$$

azaz

$$\sqrt{x+3} - |\sqrt{2x-1} - 2| = 2.$$

Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x \geq \frac{1}{2}$.

Ha $\sqrt{2x-1} \geq 2$, $x \geq \frac{5}{2}$, akkor $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$, $x_1 = 4$ és ez valóban megoldás.

Ha $0 \leq \sqrt{2x-1} < 2$, azaz $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2}$, akkor $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4$, ahonnan $x_2 = 52 - 8\sqrt{39}$.

Az egyenlet megoldásai x_1 és x_2 .

5. Alkalmazzuk a $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ valamint a $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ azonosságokat:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2x - (1 + \cos 2x)) + 3 \sin 2x; \\ f(x) &= 3 \left(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x \right); \\ f(x) &= 6 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right). \end{aligned}$$

Mivel $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ és $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, ezért

$$f(x) = 6 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$f(x)$ legnagyobb értéke 6, amit akkor vesz fel, ha $\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ legkisebb értéke -6, amit akkor vesz fel, ha $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Legyen a mértani sorozat négy tagja: a , aq , aq^2 , aq^3 . Ekkor a számtani sorozat négy egymást követő tagja: $a-1$, $aq+6$, aq^2+4 , aq^3-4 .

A számtani sorozat második tagjától bármely tagjának kétszerese egyenlő a szomszédos tagok összegével, így

$$a - 1 + aq^2 + 4 = 2(aq + 6) \quad \text{és} \quad aq + 6 + aq^3 - 4 = 2(aq^2 + 4).$$

Ezekből $a(q - 1)^2 = 9$, $aq(q - 1)^2 = 6$, $q = \frac{2}{3}$, $a = 81$. A négy szám: 80, 60, 40, 20.

7. Az E érintési pont abszcisszája, $3x_0 - 4 \cdot 9 = -45$, $x_0 = -3$. Az e egyenes az x tengelyt az $A(-15; 0)$ pontban metszi. A feltételeknek két kör felel meg, a körök az x tengelyt az F_1 és F_2 pontban érintik. Egy külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AF_1 = AF_2$. $AE^2 = 12^2 + 9^2 = 15^2$, $AE = 15$, tehát $AF_1 = AF_2 = 15$, így $F_1(0, 0)$, $F_2(-30, 0)$. A keresett körök középpontjai rajta vannak a közös érintőre az E pontban merőleges egyenesen, valamint az $x = 0$, illetve $x = -30$ egyenletű egyeneseken, így $u_1 = 0$, $u_2 = -30$ és mivel $4x + 3y = 15$, ezért $v_1 = 5$, $v_2 = 45$. A körök egyenlete:

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{illetve} \quad (x + 30)^2 + (y - 45)^2 = 2025.$$

Megjegyzés. A feladat sokféle módon oldható meg, paraméteresen, szögfelező alkalmazásával, trigonometria, illetve elemi geometria alkalmazásával.

8. Az egyenletnek akkor valósak a gyökei, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, azaz

$$4 - 4(a - 1)^2 \geq 0, \quad 1 \geq (a - 1)^2, \quad 1 \geq |a - 1|, \quad -1 \leq a - 1 \leq 1, \quad 0 \leq a \leq 2.$$

A gyökök összege, illetve szorzata: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = (a - 1)^2$, így $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 - 2(a - 1)^2$. Mivel $0 \leq (a - 1)^2 \leq 1$, ezért $-2 \leq -2(a - 1)^2 \leq 0$ és $2 \leq 4 - 2(a - 1)^2 \leq 4$.

A gyökök négyzetösszegének legkisebb értéke 2, amit $a = 0$ és $a = 2$ esetén vesz fel; a gyökök négyzetösszegének legnagyobb értéke 4, amit $a = 1$ esetén vesz fel.