

1. Az egyenletek nem értelmesek, ha  $x = 2$  vagy  $x = -2$ . Szorozzuk meg az egyenletek mindkét oldalát  $(x^2 - 4)$ -gyel, majd rendezzük az egyenleteket!

- a)  $x^2 + 9x + 18 = 0$ , a megoldások:  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = -3$ ;  
 b)  $x^2 - x - 2 = 0$ , a megoldás:  $x = -1$  ( $x = 2$  nem megoldás);  
 c)  $x^2 + 8x + 16 = 0$ , a megoldás  $x = -4$  ( $x_1 = x_2 = -4$ );  
 d)  $x^2 + 4x + 8 = 0$ , az egyenletnek nincs megoldása.

2. A szögfelezők négyzetet határolnak. Ha a téglalap oldalai  $a$  és  $4a$  egység, akkor a négyzet oldala  $b = \frac{4a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$  egység, a téglalap átlója  $a\sqrt{17}$  egység. A területek aránya  $\frac{4a^2}{\frac{9a^2}{2}} = \frac{8}{9}$ , az átló és a négyzetoldal aránya  $\frac{\sqrt{17}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{34}}{3}$ .

3. Azonos átalakításokkal

$$f(x) = \frac{(3x^2 + 12x - 36) + (-x + 2)}{x^2 + 4x - 12} = 3 - \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 6)} = 3 - \frac{1}{x + 6},$$

ha  $-4 \leq x \leq -1$ . Ekkor

$$2 \leq x + 6 \leq 5, \quad \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x + 6} \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{x + 6} \leq -\frac{1}{5},$$

s végül  $f(-4) = \frac{5}{2} \leq 3 - \frac{1}{x + 6} \leq \frac{14}{5} = f(-1)$ .

Az  $f(x)$  legkisebb értéke  $5/2$ , legnagyobb értéke  $14/5$  az adott intervallumban. ( $f(x)$  minden  $5/2$  és  $14/5$  közé eső valós számot felvesz a megadott intervallumon.)

4. A  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$  azonosságok alkalmazhatjuk vizsgálattal. Ugyanis ha  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  akkor  $\operatorname{tg} 2x$  értelmezett, míg  $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$  nem, ezzel szűkült az értelmezési tartomány.  $x_{1,n} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  kielégíti az adott egyenletet, ezért  $x_{1,n}$  megoldás. Legyen  $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ .

$$\operatorname{tg} \left( x + \frac{3\pi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

$x = k\pi$  helyen  $\operatorname{tg} \left( x + \frac{3\pi}{2} \right)$  nem értelmezett, így írhatunk helyette  $-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ -et.

$$-\frac{3}{\operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

ahonnan  $\operatorname{tg}^2 x = 3$ ,  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  vagy  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ . Az  $x_{1,n}$ -en kívül az egyenlet megoldásai:  $x_{2,k} = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  és  $x_{3,m} = -\frac{\pi}{3} + m\pi$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ .

5. Ismeretes, hogy

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{és} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Mivel  $(k+3)(7k-1) = 7k^2 + 20k - 3$ , azért

$$S_n = (7 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 3) + (7 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 3) + \dots + (7n^2 + 20n - 3), S_n = 7 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 20 \cdot (1 + 2 + \dots + n) - 3n, S_n$$

(Az állítást teljes indukcióval is igazolhatjuk.)

6. a) Mivel  $D = p^2 - 4q \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = q$ , ezért valóban  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = p^2 - 4q = D$ .  
 b)  $D = 4a^2 - 4(2a^2 - 3a) = -4 \cdot a(a - 3)$ .  $D \geq 0$ , ha  $0 \leq a \leq 3$ .

$$(x_1 - x_2)^2 = D = -4a^2 + 12a = 9 - 4 \left( a - \frac{3}{2} \right)^2 \leq 9.$$

$(x_1 - x_2)^2$  legnagyobb értéke 9, amelyet  $a = \frac{3}{2}$  esetén vesz fel.

7. A keresett  $P_0$  ponton áthaladó egyenesnek van meredeksége, hiszen nem lehet párhuzamos az  $y$  tengellyel. Válasszuk paraméternek az egyenes  $m$  meredekségét, azaz az egyenes egyenletét  $y = m(x + 6)$  alakban keressük. Ez az egyenes az  $y$  tengelyt a  $D(0; 6m)$  pontban metszi, az  $AC$  egyenest az  $E(x_0, y_0)$  pontban. Az  $ABC$  háromszög területe 24 területegység, az  $ADE$  háromszög területe 12 területegység, tehát  $AD \cdot x_0 = 24$ .  $AD = 16 - 6m$ . Az  $AC$  egyenes egyenlete  $16x + 3y = 48$ . Az  $y = mx + 6m$  egyenletű egyenes az  $AC$  egyenest olyan  $x_0$  abszcisszájú pontban metszi, amelyre

$$16x_0 + 3(mx_0 + 6m) = 48, \quad x_0 = 6 \cdot \frac{8 - 3m}{16 + 3m},$$

így

$$2 \cdot (8 - 3m) \cdot 6 \cdot \frac{8 - 3m}{16 + 3m} = 24, \quad \text{ahonnan} \quad 9m^2 - 54m + 32 = 0,$$

$m_1 = \frac{2}{3}$ ,  $m_2 = \frac{16}{3}$ . A keresett egyenes egyenlete:  $y = \frac{2}{3}x + 4$ . ( $m = \frac{16}{3}$  esetén az egyenes nem metszi az  $AC$  szakaszt. Ennek a „megoldásnak” előjeles területtel geometriai jelentést tulajdoníthatunk. Hogyan?)

8. a) Mivel

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) &= \frac{1}{2} ((x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)) = \\ &= \frac{1}{2} ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) \geq 0, \end{aligned}$$

azért  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1$ . Egyenlőség  $x = y = z$  esetén áll fenn. (Az igazolás során alkalmazhatjuk az  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  azonos egyenlőtlenséget.)

b) Ha a téglatest éleinek hossza  $x, y, z$  egység, akkor  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

A téglatest felszíne  $A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$  területegység.

$$A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) = 8.$$

A legnagyobb felszínérték  $A_{\max} = 8$  területegység, amit akkor kapunk, ha  $x = y = z$ , tehát ha a téglatest kocka. (A kocka  $x$  élére  $3x^2 = 4$ ,  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$  egység.)

**Rábai Imre**