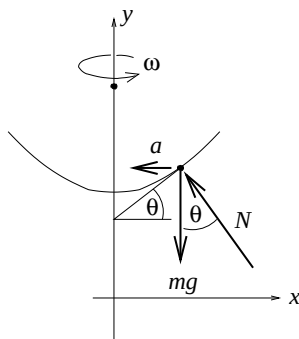


Kísérleti forduló ¹

Forgó folyadék

1. rész: g Meghatározása forgó folyadék segítségével

Tekintsük a forgó folyadéknak egy kicsiny, meghatározott m tömegű, folyadék felszínén elhelyezkedő „darabkáját”, és írjuk fel ezen folyadékmennyiség mozgásegyenletét! A kiszemelt anyagdarabkára a függőleges mg gravitációs erő és a környező folyadék által a felületre merőlegesen kifejtett ereje hat. Ezen két erő eredője vízszintes kell legyen (hiszen a folyadékdarabka vízszintes síkban x sugarú körpályán mozog), s az eredő nagysága — Newton II. törvénye értelmében — $m\omega^2 x$. Az 1. ábráról leolvashatjuk, hogy a folyadék felszínének meredekségét valóban a megadott $\tan \theta = \omega^2 x / g$ összefüggés adja meg.

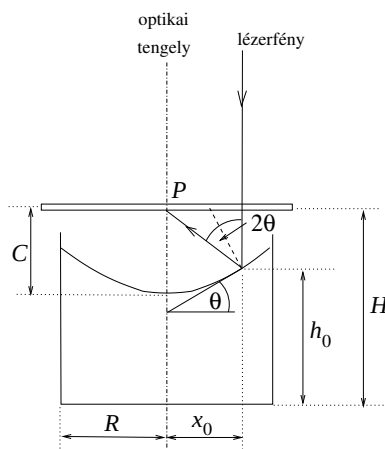


1. ábra.

A feladat útmutatásait követve — a geometriai távolságokat vonalzóval, a forgás szögsebességét stopper segítségével mérve — függőlegesen beeső lézersugár visszaverődéséből a

$$\tan 2\theta = \frac{x_0}{H - h_0} = \frac{R}{\sqrt{2}(H - h_0)}$$

összefüggésnek megfelelően (2. ábra) meghatározhatjuk különböző ω -k esetén a θ szöget. (Erre a részfeladatra csak az a versenyző kaphatott maximális pontszámot, aki legalább 6 „különböző” szögsebességnél mért, és mindegyik — már stabilizálódott — forgásnál úgy járt el, hogy a kisebb szögsebességeknél legalább 10, gyorsabb forgásnál pedig legalább 15–20 körülfordulás idejéből számította ki a szögsebességet.) Ha a mért geometriai adatokból kiszámított $\tan \theta$ -t a szögsebesség négyzetének függvényében ábrázoljuk, és a kapott (becsült mérési hibákat is feltüntető) „pontokra” egyenest illesztünk, akkor ennek az egyenesnek a meredeksége a megadott képlet szerint (egy arányossági tényezőtől eltekintve) éppen a nehézségi gyorsulás *mért* értékét szolgáltatja. Az illesztett egyenes meredekségének (akár szabad szemmel leolvasható, akár az egyes pontok pontatlanságából zsebszámológéppel kiszámítható) bizonytalansága megadja g mérési hibájának nagyságrendjét is. A rendelkezésre álló eszközökkel kapható tipikus mérési eredmény: $g = 980 \pm 30 \text{ cm/s}^2$.



2. ábra.

2. rész: Optikai rendszer

a) A fókustávolság vizsgálata

Az ernyőt meghatározott H magasságban tartva a motor fordulatszámát óvatosan növelve megkereshető az a szögsebesség, amely mellett a (függőleges) optikai tengellyel párhuzamosan beeső lézerfény visszaverődve éppen az

¹ A feladatok szövegét a KöMaL októberi számában közzétük.

optikai tengelynél metszi az ernyőt. A leképező rendszer C fókusz távolsága jó közelítéssel $(H - h_0)$ -nak vehető (hiszen a folyadék „behorpadása” általában elhanyagolhatóan kicsiny a fókusz távolság mellett). A mérési adatok szerint a fókusz távolság és a szögsebesség közötti kapcsolat $C \propto \omega^{-2}$ jellegű. Ezt a sejtést empirikusan úgy igazolhatjuk, hogy $1/C$ -t ω^2 függvényében ábrázoljuk, és megnézzük, milyen pontossággal illeszthető a mérési adatokra egyenes.

Az adatok kiértékelését úgy is elvégezhetjük, hogy a folyadéktükről f fókusz távolsága és az ω szögsebesség közötti kapcsolatot $f = A \cdot \omega^n$ alakban keressük, ahol A és n meghatározandó állandók. A mérési adatokból kiszámítható $\log f$ -t ábrázolhatjuk $\log \omega$ függvényében, s ha valóban a feltételezett kapcsolat áll fenn f és ω között, akkor egy n meredekségű egyenest várhatunk. Az ilyen módon kiértékelte adatokból n (meglehetősen nagy bizonytalansággal) $-1,7$ körüli értéknek adódott. (A versenyen a $-2 < n < -1,6$ tartományba eső értékeket fogadták el reális mérési eredményként.)

Megjegyzés. A fókusz távolság és a szögsebesség közötti kapcsolat elméleti megfontolásokkal is alátámasztható. A forgó folyadék felszínét jellemző $y = y_0 + x^2/(4C)$ egyenletet differenciálva és az $y' = \tan \theta = (x/g)\omega^2$ képlettel egybevetve leolvashatjuk, hogy $1/C$ valóban arányos ω^2 -tel, s az arányossági tényező $2/g$.

Ugyanehhez az eredményhez differenciálszámítás nélkül is eljuthatunk, ha meggondoljuk, hogy a forgó folyadékhoz rögzített koordináta-rendszerben a folyadék minden része, így a felszínén lévő „darabkái” is egyensúlyban vannak. A felszínen (a forgástengelytől x távolságban, az edény aljától pedig y magasságban) lévő m tömegű anyagdarabka mgy gravitációs helyzeti energiával, a $D = -m\omega^2$ „rugóállandóval” jellemezhető „centrifugális erőterben” pedig $Dx^2/2 = -m\omega^2 x^2/2$ potenciális energiával rendelkezik. Egyensúlyi állapotban a folyadék felszíne ekvipotenciális, a felület mentén a folyadékdarabkák összenergiája mindenhol ugyanakkora:

$$mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \text{konstans},$$

azaz

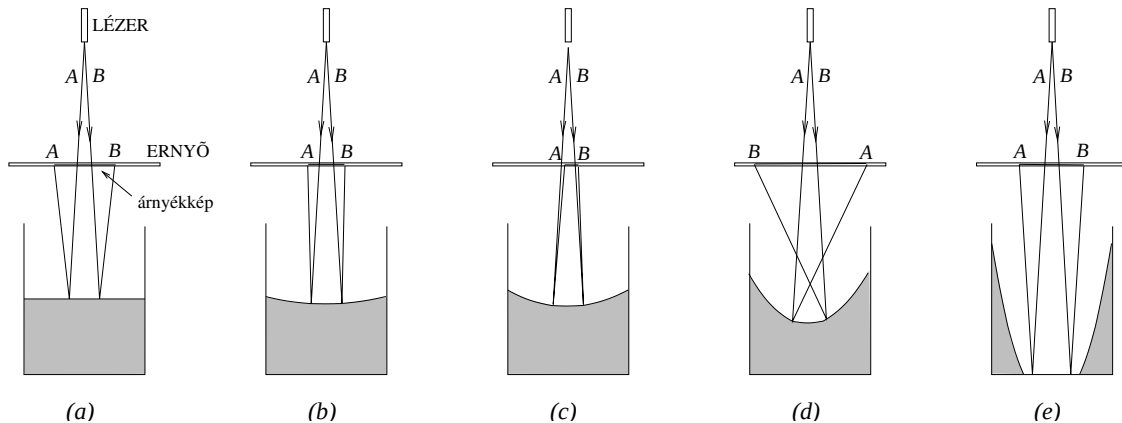
$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0.$$

Ezt a kifejezést a parabola fókusz távolságát is tartalmazó egyenletével összevetve megkapjuk, hogy $1/C = 2\omega^2/g$. A fenti elméleti megfontolások nem képezték a mérési feladat részét, levezetésüket nem várták el a versenyzőktől.

b) Az ernyőn látható „kép” analízise

A lézer fejére erősíthető betét egy rövid fókusz távolságú kicsiny lencsét tartalmazott, amely a lézer párhuzamos fénysugarait széles szögtartományban szétszórta. A szétfutó fény útjába (még a betétrész belsejében) egy jellegzetes alakban (pl. félhold formájában) kivágott árnyékvetítő lemezkét helyeztek, így az áttetsző papírra (ernyőre) eső lézerfény megjelenítette az árnyékvetítő lemezke alakját. Ez a megjelenítés azonban különbözik az optikai leképező rendszerek szokásos képalkotásától, erre utalt a „kép” szónál az idézőjel. A fényforrásból szét tartóan kiinduló sugarak *nem az ernyőnél* metszik egymást, ott tehát nem az optikai képalkotás törvényeinek megfelelő képet, hanem csupán árnyékjelenséget látunk. A forgó folyadék parabolatükrre magát a fényforrást (és az árnyékvetítő betétrészt) képezi le, s az ernyőn kialakuló árnyékkép olyan lesz, mintha a lézer nem az eredeti helyén, hanem a leképezett helyzetében lenne.

Az ernyőn megjelenő „direkt árnyékkép”, illetve a forgó folyadékról visszavert árnyékkép állását és nagyságát tekintve is különbözhet. Az álló folyadék felszíne síktükörként viselkedik, ilyenkor az ernyőn látszó tükrözött árnyékkép a direkt árnyékképpel egyező állású, de annál nagyobb méretű (3.a ábra). Az igazi (a sugarak metszéspontjában képződő) optikai kép virtuális (és nem az ernyőn keletkezik).



3. ábra.

A szögsebességet lassan növelve a fókusz távolság csökken, a lézerfej optikai képe egyre messzebb kerül (de továbbra is virtuális). A tükrözött árnyékkép mérete a szögsebesség növekedtével egyre csökken, állása a direkt árnyékképpel megegyező (3.b ábra). Hasonló a helyzet akkor is, amikor a folyadék fordulatszáma már olyan nagy, hogy a lézer feje a fókusz ponton belülre kerül (3.c ábra): a visszavert árnyékkép mérete egyre csökken, állása a direkt árnyékával megegyező, de a lézer optikai képe már valódi kép lesz.

A fordulatszámot tovább növelve a lézerfej optikai képe az ernyő alá fog kerülni (3.d ábra). Ekkor a visszavert árnyékkép állása megfordul, a direkt árnyékkal ellentétes állású lesz, és a mérete a szögsebesség növekvő függvénye. A lézerfej optikai képe továbbra is valódi kép.

A fordulatszámot még tovább növelve ez a tendencia is megváltozik, hiszen egy bizonyos (az edényben levő folyadék mennyiségétől függő) kritikus értéknél a folyadék felszíne eléri az edény alját. A kritikus fordulatszámot számottevően meghaladó fordulatszámoknál a lézer fénye már nem a folyadékról, hanem a sík fenéklapról verődik vissza (3.e ábra). Ebben tartományban az árnyékkép ismét egyenes állású lesz, az optikai kép virtuális, és az árnyékkép mértéke nyilvánvalóan nem függ a szögsebességtől.

3. rész: A törésmutató

Az optikai rács (és a megadott elhajlási képlet) segítségével a lézerfény hullámhossza levegőben könnyen mérhető. A lézerfényt célszerű merőlegesen ejteni a rácsra, majd egy mérhető távolságra levő ernyőn megmérhetjük az elhajlási maximumok távolságát, s kiszámíthatjuk az elhajlási szögeket is. A mérés pontosságát növeli, ha több (a verseny rendezőinek elvárása szerint legalább három) elhajlási maximumból számítjuk ki a hullámhosszat. A hullámhossz mérését az elfogadható hibabecslés teszi teljessé.

Az előző mérést folyadékba merített diffrakciós ráccsal megismételve meghatározhatjuk a fény hullámhosszát a folyadékban. Ennek a hullámhossznak és a levegőben mért hullámhossznak az aránya éppen a folyadéknak (levegőre vonatkoztatott) n törésmutatójával, vagyis a mérendő mennyiséggel egyezik meg.

Elméleti forduló

1. feladat. Négy (egymástól független) probléma. A. Klisztron

a) A $-e$ töltésű, m tömegű, v_0 kezdősebességű elektronok $mv_0^2/2$ mozgási energiája $\pm V$ feszültség hatására $\mp eV$ értékkel változik meg. Így a bal oldali üregből kilépő felgyorsított részecskék sebessége

$$v_+ = \sqrt{v_0^2 + 2 \left(\frac{e}{m} \right) V} = 2,044 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a lelassított elektronoké pedig

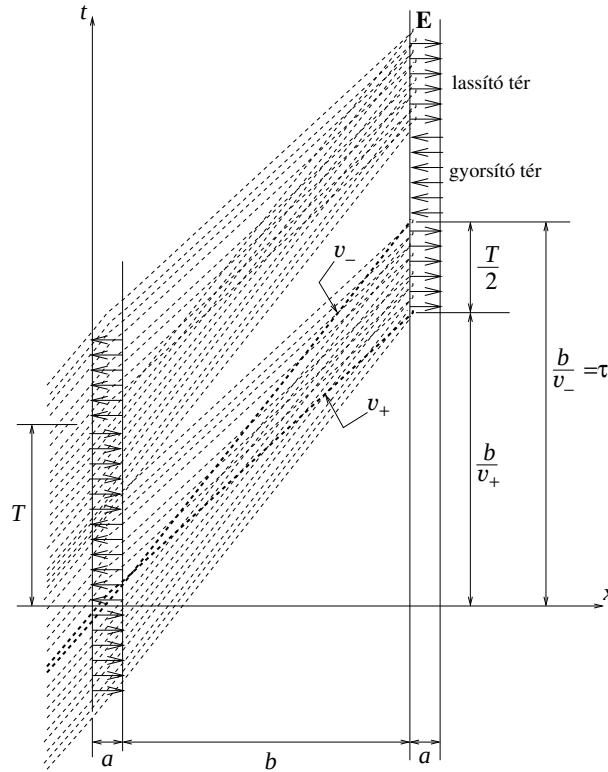
$$v_- = \sqrt{v_0^2 - 2 \left(\frac{e}{m} \right) V} = 1,956 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A 4. ábra az elektronsugár egyes részecskéinek vázlatos út-idő diagramját mutatja. Erről leolvasható, hogy a két üreg közötti b távolság akkor esik éppen az első torlódási helyre, ha

$$\frac{b}{v_+} + \frac{T}{2} = \frac{b}{v_-},$$

azaz

$$b = \frac{T}{2} \frac{v_+ v_-}{v_+ - v_-} = 2,272 \text{ cm}.$$



4. ábra.

b) A 4. ábrán az elektromos térerősség irányát is feltüntettük a bal oldali üreg ($x \approx 0$) és a jobb oldali üreg ($x \approx b$) helyén. A periodikusan (négyszögjelnek megfelelően) váltakozó, de egymáshoz képest τ időkülönbséggel, azaz $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \tau/T$ fáziskülönbséggel eltolt jelek akkor fogják a kilépő elektronokat fékezni, ha a torlódási helyen a térerősség jobbra mutat. Ennek feltétele az, hogy $b = v_- \tau$, azaz

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{b}{Tv_-} = 2\pi \cdot \frac{v_+}{v_+ - v_-} = 2\pi \cdot 11,613.$$

Tekintettel arra, hogy egy periodikus függvény fázisának eltolása csak 2π egész számú többszöröse erejéig határozott, a fenti szám egész részét elhagyhatjuk:

$$\Delta\varphi = 0,613 \cdot 2\pi \text{ radián} = 220^\circ,$$

vagy ami ezzel egyenértékű: $\Delta\varphi = -140^\circ$.

B. Molekulák közötti távolság

Az ideális gáznak tekintett vízgőz sűrűsége a gáztörvény szerint

$$\varrho_V = \frac{m}{V} = \frac{Mp_0}{RT}.$$

A víz és a gőz sűrűségének aránya légköri nyomáson és a forráspont hőmérsékletén

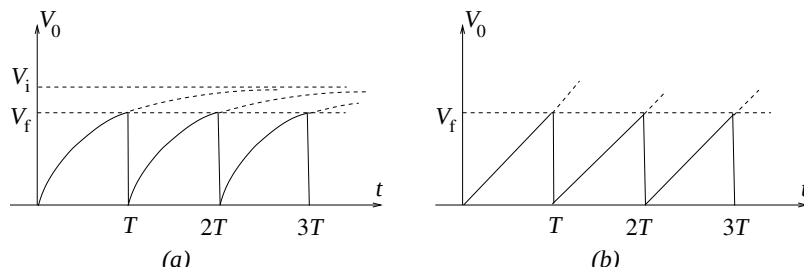
$$\frac{\varrho_L}{\varrho_V} = \frac{RT\varrho_L}{Mp_0} \approx 1720 \approx 12^3.$$

Mivel a sűrűsége a molekulák közötti átlagos távolság köbével fordítottan arányos, megállapíthatjuk, hogy gőzfázisban a molekulák kb. 12-szer messzebb vannak egymástól, mint folyadék halmazállapotban.

C. Egyszerű fűrészfog-generátor

a) A kapcsoló zárását követően a kondenzátor az R ellenálláson keresztül eleinte gyorsan, majd egyre lassabban töltődik. A V_0 feszültség és a telepfeszültség különbsége az idő exponenciális függvénye szerint csökken mindaddig, míg V_0 el nem éri a V_f kisülési feszültséget. Ekkor a szikrakisülés hatására V_0 hirtelen nullára csökken, majd a folyamat kezdődik előlről. (5.a ábra).

b) $V_f \ll V_i$ esetén a kondenzátor feszültsége elhanyagolható a telepfeszültség mellett. A töltőáram ilyenkor jó közelítéssel állandónak tekinthető, a kondenzátor feszültsége tehát (egészen a szikrakisülésig) időben lineárisan növekszik (5.b ábra).



5. ábra.

c) Ha a linearitási feltétel teljesül, az áramerősség $I = V_i/R$, a kondenzátor töltése t időtartamú töltés után $Q = It$, feszültsége pedig

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{V_i}{RC}t.$$

Ez akkor egyezik meg a V_f kisülési feszültséggel, amikor

$$t = T = \frac{V_f}{V_i}RC,$$

akkora tehát a fűrészfog-generátor periódusideje.

Megjegyzés. A periódusidőt megadó formulát a kondenzátor töltődését leíró

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)}\right)$$

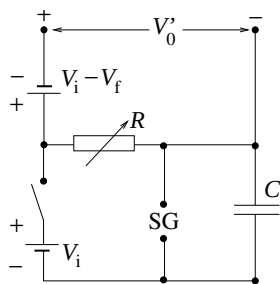
összefüggésből is megkaphatjuk, ha kihasználjuk, hogy $V_f \ll V_i$, emiatt $T \ll RC$. Az exponenciális függvény kis x -ekre érvényes $e^x \approx 1 + x$ közelítő alakjából

$$V_f \approx V_i \left[1 - \left(1 - \frac{T}{RC}\right)\right] = \frac{V_i T}{RC}, \quad \text{ahonnan} \quad T \approx \frac{V_f}{V_i}RC.$$

d) Az R ellenállás értékét megváltoztatva (és a szikraköz V_f kisülési feszültségét rögzített értéken tartva) fűrészfogjelnek csak a periódusideje változik, amplitúdója nem.

e) Ha az ellenállás nagyságát és a szikraköz távolságát egyszerre változtatjuk, még hozzá olymódon, hogy az $R \cdot V_f$ szorzat változatlan maradjon, akkor a fűrészfogjelnek csak az amplitúdója változik, periódusideje nem.

f) A megadott („fordított fűrészfog”) jelalak többféle kapcsolással is megvalósítható. Egy lehetséges megoldást mutat a 6. ábra.



6. ábra.

D. Atomsugár

I. (hivatalos) megoldás: T hőmérsékletű gázban az M tömegű atomok átlagsebessége az energia egyenletes eloszlásának tételéből (az ekvipartíciós tételből) határozhatjuk meg. Eszerint

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kT,$$

ahol v a sebesség valamelyik komponensének átlagos nagysága, k pedig a Boltzmann-állandó. (Az „átlagos nagyság” a négyzetes átlagolást, a sebességkomponens négyzetének átlagából vont négyzetgyököt jelenti.) Innen a sebesség bármelyik komponensének, speciálisan a vízszintes összetevőjének átlagos nagysága $v = \sqrt{kT/M}$.

A kemence falán levő kicsiny lyukon keresztül „vízszintes” kilépő atomokból álló részecskenyaláb a haladási irányára merőlegesen fokozatosan kiszélesedik, az atomsugár átmérője megnő. Ennek az az (egyik) oka, hogy a D átmérőjű lyukon áthaladó részecskék $v_{\perp}$ „transzverzális” (a haladási irányra merőleges) sebessége nem lehet pontosan nulla, hanem a Heisenberg-féle határozatlansági reláció értelmében legalább

$$\Delta v_{\perp} \approx \frac{\hbar}{MD}$$

nagyságú (ahol $\hbar$ a 2π -vel osztott Planck-állandót jelöli).

A atomsugár $t = L/v$ idő alatt tesz meg L hosszúságú utat, ezalatt $2v_{\perp} \cdot t$ értékkel nő az átmérője, mérete tehát hozzávetőlegesen

$$D_{\text{új}} = D + \frac{2L\hbar}{D\sqrt{kTM}}$$

lesz. (Ez a kifejezés csak nagyságrendi becslésnek tekinthető, a benne szereplő számfaktort tehát nem szabad nagyon „komolyan venni”; a kétszerese, vagy a fele éppúgy elfogadható lenne.)

II. megoldás (Varjú Péter dolgozata alapján). A kemencéből kilépő $v \approx \sqrt{kT/M}$ sebességű részecskék a de Broglie-féle hipotézis szerint $\lambda = h/(Mv)$ hullámhosszúságú „anyaghullámnak” tekinthetők. Ezek az anyaghullámok — a fényhullámokhoz hasonlóan — elhajlást szenvednek a D átmérőjű kör alakú nyíláson. A nyílás különböző részeiből kiinduló hullámok interferálnak, s bizonyos irányokban haladva erősítik, más irányokban viszont kioltják egymást. (Pl. a pontosan „előrefelé” haladó hullámok útkülönbsége nulla, ezek tehát mind erősítik egymást.) Az atomnyaláb szélességét az első interferencia-minimummal azonosítva nagyságrendi becslést kaphatunk az atomsugár kiszélesedésére.

Ismeretes, hogy egy D szélességű (párhuzamos falú) rés esetén az első kioltás olyan θ elhajlási szögnél észlelhető, amelynél a rés egyik szélétől induló hullámok éppen egy hullámhosszal nagyobb utat tesznek meg az észlelő ernyőig, mint a rés másik szélétől induló hullámok. Ennek geometriai feltétele (kicsiny szögű elhajlások és viszonylag távoli ernyő esetén):

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\lambda}{D} \approx \frac{h}{D\sqrt{kTM}}.$$

Jelen esetben az elhajlás nem résen, hanem kör alakú lyukon történik, emiatt a formulában szereplő számfaktor egy kicsit más lesz, ez azonban egy nagyságrendi becslésnél figyelmen kívül hagyható.

A θ szögben elhajló atomsugarak az L távolságban levő ernyőt $2L\theta$ átmérőjű körben érik, ekkora lesz tehát (nagyságrendileg) a kiszélesedett sugár mérete. Ez az érték viszonylag távoli ernyőnél ($L\theta \gg D$ teljesülése esetén) megegyezik az előző megoldásban kapott kifejezéssel.

Megjegyzés. A feladat megoldásánál feltételeztük, hogy a kemence falán levő (az atomok méretével összemérhető átmérőjű) lyukon áthaladó atomok egymással nem ütköznek (vagyis a részecskék szabad úthossza sokkal nagyobb, mint a fal vastagsága). Feltettük továbbá azt is, hogy a kemence falának és az atomsugárnak a kölcsönhatása csak a nyaláb transzverzális méretének korlátozásában játszik szerepet, s nem lép fel a klasszikus tömegpontok (pl. biliárdgolyók) rugalmas falak közötti ide-oda pattogásának megfelelő jelenség. Azt is feltételeztük, hogy a részecskék a kilépésük után már szabadon mozognak, a levegő molekuláival nem ütköznek.

Mindezek a feltevések meglehetősen idealisztikusak, kísérleti megvalósításuk szinte lehetetlen. Réálisabb lenne a feladat, ha a kemencéből kilépő részecskék vákuumban haladnának, s a mozgásirányuk bizonytalanságát egy bizonyos távolságban elhelyezett akadályon levő D átmérőjű diafragma korlátozná. (G. P.)

2. feladat. *Kettőscsillag a)* Egy R sugarú, T hőmérsékletű (abszolút fekete) test egységnyi idő alatt $4\pi R^2 \sigma T^4$ energiát sugároz ki (σ a Stefan–Boltzmann törvényben szereplő állandó). Ebből az energiából az ℓ távolságra levő Földre felületegységenként és időegységenként

$$(1) \quad P = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi \ell^2}$$

energia jut; ez az egyik mérhető adat.

A kalcium színekp vonalának (ugyancsak mérhető) $\Delta\lambda$ eltolódása és a csillag m_0 tömege, valamint R sugara között az energia-megmaradás törvénye teremt kapcsolatot:

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{Gm_0}{R} \cdot \frac{h}{c\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{Gm_0}{\ell} \cdot \frac{h}{c\lambda}.$$

A jobb oldal második tagja $\ell \gg R$ miatt elhanyagolható. A fenti képletből a közösleges csillag sugarának és tömegének arányára ($\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \ll \lambda_0$ felhasználásával)

$$(2) \quad \frac{R}{m_0} = \frac{G\lambda_0}{c^2 \Delta\lambda}$$

adódik.

Tudjuk továbbá, hogy a kettőscsillag egyes tagjainak pályasugara $r_1 = \ell\Delta\theta/2$, illetve $r_2 = \ell\Delta\phi/2$, a szögsebességük kifejezhető a mérhető 2τ keringési idővel ($\omega = \pi/\tau$), így a neutroncsillagra vonatkozó Newton-féle mozgásegyenlet:

$$(3) \quad \frac{GMm_0}{(r_1 + r_2)^2} = Mr_2\omega^2.$$

Az (1), (2) és (3) egyenletek összevetéséből a Föld és a kettőscsillag távolságára végül a következő kifejezés adódik:

$$\ell = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{c\tau}{T(\Delta\theta + \Delta\phi)} \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\lambda \cdot \sqrt{P/\sigma}}{\Delta\phi \cdot \lambda_0}}.$$

b) A kibocsátott gáz mozgását a neutroncsillag centrális gravitációs erőtere határozza meg, emiatt a gáz perdülete megmarad:

$$(4) \quad r_0^2 \omega_0 = r_f^2 \omega_f,$$

ahol ω_0 a gáz szögsebessége a neutroncsillaghoz legközelebbi helyzetben.

Az (egységnyi gáztömegre felírt) energia megmaradásának tétele szerint

$$(5) \quad \frac{1}{2} (v_0^2 + r_0^2 \omega_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2} v_f^2 - \frac{GM}{r_f}.$$

A (4), (5) egyenleteket, továbbá a közös csillag körmozgásának

$$(6) \quad r_0 \omega_0^2 = \frac{GM}{r_0^2}$$

feltételét kihasználva a keresett minimális távolságra

$$r_f = \left(\frac{v_0 \sqrt{GM r_0} - GM}{v_0^2 r_0 - GM} \right) r_0$$

adódik.

3. feladat. Magnetohidrodinamikai (MHD) generátor

a) A B indukciójú mágneses mezőben v sebességgel mozgó w széles higanyszálban $U = vBw$ feszültség indukálódik, melynek hatására

$$I = \frac{U}{R} = U \cdot \left(\frac{\varrho w}{Lh} \right)^{-1} = \frac{vBLh}{\varrho}$$

erősségű áram indul $-\hat{y}$ irányban. Ekkora árammal átjárt vezetőre a mágneses tér

$$F = BIw = \frac{B^2 L h w}{\varrho} v$$

nagyságú, $-\hat{x}$ irányú erőt fejt ki.

b) A mágneses mező által kifejtett „fékező nyomás”

$$p_{\text{fékező}} = \frac{F}{hw} = \frac{vB^2 L}{\varrho}.$$

Ennek és a szivattyú eredeti p nyomásának „eredője” állítja be a higany áramlási sebességét. Mivel a higany áramlási sebessége az eredő külső erővel (vagyis a szivattyú és a mágneses mező által együttesen kifejtett erővel) arányos ($v = \alpha F$), felírhatjuk, hogy

$$v = \alpha (p - p_{\text{fékező}}) = v_0 - \frac{v v_0 B^2 L}{P \varrho},$$

ahonnan

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_0 B^2 L}{P \varrho} \right)^{-1} = v_0 \frac{P \varrho}{P \varrho + v_0 B^2 L}.$$

c) A szivattyú többletteljesítményének fedeznie kell az időegységenként termelt Joule-hőt:

$$\Delta P = UI = v_0 B w \cdot \frac{v_0 B L h}{\varrho} = \frac{v_0^2 B^2 w L h}{\varrho}.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a v sebességhez tartozó mágneses fékező nyomást ($v_0 B^2 L / \varrho$ -t) megszorozzuk a hw keresztmetszettel és az áramlás v_0 sebességével.

d) Az n törésmutatójú állóvízben a fény $v_1 = c/n$ sebességgel terjed. Ha a víz a laboratóriumban álló műanyagcsőhöz képest v_0 sebességgel halad, akkor a fény sebessége a laboratóriumi koordináta-rendszerben v_0 és v_1 „eredője”, amelyet azonban nem a klasszikus fizika aritmetikai összezésével, hanem a relativisztikus sebesség-összeadás

$$v_{\text{eredő}} = \frac{v_0 + v_1}{1 + \frac{v_0 v_1}{c^2}} = \frac{v_0 + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v_0}{cn}}$$

képlete segítségével számítható ki. Ez a képlet a másodrendűen kicsiny (v^2/c^2 -tel arányos) tagokat elhanyagolva egyszerűbb alakra hozható:

$$v_{\text{eredő}} = \frac{v_0 + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v_0}{cn}} \cdot \frac{1 - \frac{v_0}{cn}}{1 - \frac{v_0}{cn}} \approx \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

A (laborbeli) terjedési sebesség

$$\Delta v = v_{\text{eredő}} - v_1 \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

megváltozása az L hosszúságú út befutásához szükséges $T = L/v_1$ időt

$$\Delta T = L \cdot \left| \Delta \left(\frac{1}{v_1} \right) \right| \approx \frac{\Delta v}{v_1^2} L \approx \frac{Lv_0}{c^2} (n^2 - 1)$$

értékkel lecsökkenti. Emiatt az f frekvenciájú fény belépő és kilépő fázisának különbsége is módosul, a fázistolás megváltozása

$$\Delta \phi = 2\pi f \Delta T \approx 2\pi f \frac{L}{c^2} (n^2 - 1) v_0.$$

Megjegyzés. Az áramló vízben terjedő fény fázisának eltolódása (pontosabban az áramlással egyező és ellentétesen haladó fényhullámok fáziskülönbsége) interferenciakísérletben jól mérhető. Ilyen mérést elsőként H. Fizeau francia fizikus végzett 1851-ben. Mérési eredményei (melyek szerint az áramló vízben nagyobb ugyan a fény terjedési sebessége, mint álló közegben, de nem annyival, mint azt a klasszikus fizika alapján várnánk) a relativitáselmélet egyik fontos kísérleti bizonyítékát képezik.

Gnädig Péter–Vankó Péter