1. Jelölje a derékszögű háromszög két befogóját a és b, a kerületét $2s$. Ekkor $ab = 86,4$, $s = \dfrac{T}{\varrho} = 18$, $2s = 36$.

Az érintő szakaszok egyenlősége miatt az átfogó $a + b - 4,8$, tehát $2a + 2b - 4,8 = 3,6$, $a + b = 20,4$. Az egyenletrendszer megoldása $a = 14,4$, $b = 6$ egység ($a \geq b$), az átfogó $c = 20,4 - 4,8 = 15,6$ egység.

2. Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4(b+c)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (ab + bc + ca - a^2) = 4\left((a-b)^2 + (a-c)^2\right) \geq 0$$

minden a, b, $c \in \mathbf{R}$ esetén, tehát mindig van valós megoldás. A két megoldás pontosan akkor egyenlő, ha $D = 0$, azaz ha $a = b = c$. Ekkor $x_1 = x_2 = a$.

3. Jelölje az átlót e, a szárat c, a trapéz köré írt kör sugarát r. Ekkor $e\cos\alpha = \dfrac{a+b}{2}$, $c = 2r\sin\alpha$. Mivel $c^2 = e^2 + a^2 - 2ea\cos\alpha$, azért $c^2 = e^2 - ab$, tehát

$$c^2 = \left(\frac{a+b}{2\cos\alpha}\right)^2 - ab = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\alpha}{4\cos^2\alpha}.$$

A trapéz köré írt kör sugara

$$r = \frac{c}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}.$$

4. A feltétel szerint $a_1 = q + 3$ és $S_n = 35$. Ha $q = 1$, akkor $a_1 = 4$, tehát $a_n = 4$, így $a_1 \cdot a_n = 16 \neq 100$, tehát $q \neq 1$. Ekkor $35 = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ és $a_1^2 \cdot q^{n-1} = 100$, tehát $q - 1 = a_1 - 4$ és $a_1 \cdot q^n = \dfrac{100}{a_1}(a_1 - 3)$; ezekből $35(a_1 - 4) = \dfrac{100}{a_1}(a_1 - 3) - a_1$,

$$36a_1^2 - 240a_1 + 300 = 0, \qquad a_1 = 5 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{5}{3}.$$

Ha $a_1 = 5$, akkor $q = 2$ és $n = 3$, hiszen $25 \cdot 2^{n-1} = 25 \cdot 4$, ha $a_1 = \dfrac{5}{3}$, akkor $q = -\dfrac{4}{3}$, és nincs megfelelő n, hiszen $\dfrac{25}{9}\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{n-1} = 100$ egyetlen n-re sem teljesül.

5. A P ponton áthaladó $x = 5$ egyenletű egyenes a feltételnek nem felel meg. Minden ettől különböző, a P ponton áthaladó egyenes egyenlete $y - 3 = m(x - 5)$ alakban is írható. Ha $m = -\dfrac{3}{2}$, akkor az egyenes párhuzamos az adott egyenesekkel, így $m \neq -\dfrac{3}{2}$. A keresett egyenes az első egyenest az $x_1 = \dfrac{10 + 10m}{3 + 2m}$, a második egyenest az $x_2 = \dfrac{5 + 10m}{3 + 2m}$ abszcisszájú pontban metszi. A feltétel szerint $|x_1 - x_2| = 1$, tehát $\dfrac{5}{|3 + 2m|} = 1$, ahonnan $m = 1$ vagy $m = -4$. A feltételnek két egyenes felel meg, ezek egyenlete: $x - y = 2$, illetve $4x + y = 23$.

(A feladat más úton is megoldható. Hogyan?)

6. Teljes négyzetté alakítással

$$(x - 2\sin xy)^2 + 4\cos^2 xy = 0, \tag{1}$$

hiszen $4 - 4\sin^2 xy = 4\cos^2 xy$.

Az (1) egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $\cos xy = 0$ és $x = 2\sin xy$.

Ha $xy = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin xy = 1$, tehát $x = 2$ és $y = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;

ha $xy = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin xy = -1$, tehát $x = -2$ és $y = -\dfrac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(A feladat más módokon is megoldható. Hogyan?)

7. Legyen a keresett távolság x, a gúla magasságát jelölje m. A hasonló testek térfogatának arányára vonatkozó tétel alkalmazásával $x = \dfrac{m}{\sqrt[3]{2}}$. A gúla akkor létezik, ha $c > \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz ha $4c^2 > a^2 + b^2$. Az átló tengelymetszet felhasználásával $m^2 = c^2 - \dfrac{a^2 + b^2}{4}$, $m = \dfrac{1}{2}\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}$. A szóban forgó távolság $x = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}$, a síkmetszet területe $t = \dfrac{ab}{\sqrt[3]{4}}$.

8. Az eredeti feladatban az egyenlet gyökeire helyesen: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{9}{2}$.

Mivel a gyökök valósak, azért $p^2+4q\geq 0$, $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=-q$, így

$$\frac{9}{2}=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2+2q, \qquad \text{azaz} \qquad 4q=9-2p^2, \qquad q=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}p^2.$$

Az $f(p)=q-p=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}p^2-p=\frac{11}{4}-\frac{1}{2}(p+1)^2$ kifejezés értékkészletét a $-3\leq p\leq 3$ intervallumban keressük, mivel $p^2+4q=p^2+9-2p^2\leq 0$ pontosan akkor, ha $p^2\leq 9$. Így $-2\leq p+1\leq 4$, amiből $0\leq (p+1)^2\leq 16$, ezért $-8\leq -\frac{1}{2}(p+1)^2\leq 0$, tehát $-\frac{21}{4}\leq f(p)\leq \frac{11}{4}$.

Rábai Imre