

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

2
a) $\frac{x-3}{x-2} + \frac{10}{x+2} = \frac{44}{4-x^2}$; b) $\frac{x-13}{x-2} + \frac{10}{x+2} = \frac{44}{4-x^2}$;
c) $\frac{x-4}{x-2} + \frac{10}{x+2} = \frac{44}{4-x^2}$; d) $\frac{x-8}{x-2} + \frac{10}{x+2} = \frac{44}{4-x^2}$.

2. Egy téglalap egyik oldalának hossza a másik oldal hosszának négyszerese. Határozzuk meg a téglalap területe és a téglalap szögfelezői által határolt négyszög területének arányát, valamint a téglalap átlója és a szögfelezők által határolt négyszög oldalainak arányát.

3. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{3x^3 + 11x - 34}{x^2 + 4x - 12}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét a $[-4; -1]$ intervallumon.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2x$ egyenletet.

5. Igazoljuk, hogy

$$S_n = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 13 + \dots + (n+3)(7n-1) = \frac{n}{6}(14n^2 + 81n + 49),$$

ahol n tetszőleges pozitív egész szám.

6. a) Az $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$) egyenlet diszkriminánsa $D \geq 0$, az egyenlet gyökei x_1 és x_2 . Igazoljuk, hogy $(x_1 - x_2)^2 = D$.

b) Az $x^2 - 2ax + 2a^2 - 3a = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) egyenlet valós gyökei x_1 és x_2 . Az a paraméter mely értékeinél veszi fel $(x_1 - x_2)^2$ a legnagyobb értékét? Mennyi ez a legnagyobb érték?

7. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0; 16)$, $B(0; 0)$, $C(3; 0)$. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(-6; 0)$ ponton, és két egyenlő területű részre osztja az ABC háromszög területét.

8. a) Igazoljuk, hogy ha $xy + yz + zx = 1$ ($x, y, z \in \mathbf{R}$), akkor $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

b) Tekintsük azokat a téglalatesteket, amelyeknek a testátlója 2 egység hosszú. E téglalatestek közül melyiknek legnagyobb a felszíne, és mennyi ez a legnagyobb felszín?

Rábai Imre