

Októberi számunkban közöltük az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldását. Ebben a cikkben az egyik feladatra visszatérve olyan további megoldást mutatunk, amelyik lényegesen különbözik az októberben közölttől, ugyanakkor tanulságos lehet mindazoknak, akik a jövőben országos vagy nemzetközi versenyeken szeretnének eredményesen részt venni. Ebben a megjegyzésben a 2. feladattal foglalkozunk.¹

A 2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$(1) \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.

A feladat első pillantásra ártalmatlan egyenlőtlenségnek tűnik, ami nem lehet nagyon nehéz... vagy mégis? A magyar csapat számára ez a feladat bizonyult a legnehezebbnek. Hat versenyzőnk együttvéve csupán 2 pontot szerzett meg a lehetséges 42-ből.

A megoldáshoz első lépésként kézenfekvő lehet behelyettesíteni a $x = \frac{bc}{a}$, $y = \frac{ca}{b}$, $z = \frac{ab}{c}$ változókat. Ezek szintén pozitív számok, a szorzatuk 1, és a behelyettesítés után az (1) egyenlőtlenség a következő, egyszerűbb alakot ölti:

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1.$$

Azt is megállapíthatjuk, hogy az $x = y = z = 1$ (azaz $a = b = c$) esetben egyenlőség áll fenn.

Hogyan tovább? Láthatjuk, hogy a feladat nehézsége abból fakad, hogy összegek négyzetgyökeit kell felülről becsülnünk, ehhez pedig meglehetősen kevés eszköz áll rendelkezésünkre. Ha alsó becslésre volna szükség, akkor egészen más lenne a helyzet. A három négyzetgyökös kifejezést kényelmesen tudjuk alulról becsülni például a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel. Közben persze vigyáznunk kell, hogy $x = y = z = 1$ esetén mindig egyenlőség álljon:

$$(3) \quad \sqrt{1+8x} \geq \sqrt{9 \cdot \sqrt[9]{1 \cdot x^8}} = 3x^{4/9}; \quad \sqrt{1+8y} \geq 3y^{4/9}; \quad \sqrt{1+8z} \geq 3z^{4/9}.$$

Ezek alapján a három gyökös kifejezés szorzatát és összegét sem nehéz alulról megbecsülni.

De mi a helyzet a felső becsléssel? A felső becsléshez jó lenne megszabadulni a kellemetlen négyzetgyökjeltől. Ez pedig legegyszerűbben négyzetre emeléssel lehetséges. Szorozzuk be a (2) egyenlőtlenséget a nevezőkkel. Az így kapott egyenlőtlenségben csupán egyetlen négyzetgyökös kifejezést kell felülről becsülnünk, a jobb oldalt:

$$(4) \quad \sqrt{1+8y}\sqrt{1+8z} + \sqrt{1+8z}\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8x}\sqrt{1+8y} \geq \sqrt{1+8x}\sqrt{1+8y}\sqrt{1+8z}.$$

Most pedig vegyünk nagy levegőt, emeljük mindkét oldalt négyzetre, és rendezzük az egyenlőtlenséget! (Ne felejtsünk el xyz helyére 1-et írni.) A rendezés után a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(5) \quad 4x + 4y + 4z + \sqrt{1+8x}\sqrt{1+8y}\sqrt{1+8z} \left(\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \right) \geq 255.$$

A rendezés során azt tapasztaljuk, hogy (4) jobb oldalának négyzetét „lenyelik” a baloldalon álló tagok négyzetei, csupán egy konstans marad.

A megoldás innen kezdve triviális: behelyettesítjük a (3) egyenlőtlenség-hármaszt és alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Kós Géza

¹ Az olimpiai feladatok megoldása a KöMaL 2001/7. számának 389–394. oldalán olvasható.