

1. A koszinusztétel és a háromszög területképletének alkalmazásával

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad \text{és} \quad 2ab \sin \gamma = 4T.$$

Emeljük négyzetre az egyenleteket, majd adjuk őket össze:

$$4a^2b^2 = 16T^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

ebből következik az első állítás. Innen

$$\begin{aligned} 16T^2 &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2), \\ 16T^2 &= (a + b - c)(a + b + c)(c + a - b)(c - a + b). \end{aligned}$$

Mivel $a + b + c = 2s$, $-a + b + c = 2(s - a)$, $a - b + c = 2(s - b)$ és $a + b - c = 2(s - c)$, azért valóban

$$T^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

2. Az egyenletnek minden valós x -re van értelme. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát. Az így kapott egyenlet az adott egyenlettel ekvivalens, hiszen az $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbf{R}$ függvény nyilván szigorúan monoton. Alkalmazzuk az

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

azonosságot, rendezzük az egyenletet, végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$x + (2x - 3) + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x - 3} \cdot \sqrt[3]{12(x - 1)} = 12(x - 1), 3\sqrt[3]{2x^2 - 3x} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{x - 1} = 9(x - 1), 12(2x^2 - 3x)(x - 1) - 27(x - 1)^3$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

3. Alkalmazzuk az $\log_u v = \frac{1}{\log_v u}$ ($u > 0$, $u \neq 1$, $v > 0$, $v \neq 1$) és az $\log_u v_1 + \log_u v_2 = \log_u v_1 v_2$ ($u > 0$, $u \neq 1$, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$) azonosságokat:

$$\begin{aligned} \log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x &= \frac{\log_x c + \log_x a + \log_x b}{\log_x a \cdot \log_x b \cdot \log_x c} = \\ &= \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_x abc. \end{aligned}$$

4. $x^2 - x + 1 > 0$, $x^2 + x + 1 > 0$ és $4x^2 + 3 > 0$ minden valós x -re ($x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$), és $4x^2 + 3 > x^2 - x + 1$ minden valós x -re, hiszen $3x^2 + x + 2 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12}$; hasonlóan $4x^2 + 3 > x^2 + x + 1$ minden valós x -re. A három adott kifejezésnek tehát minden valós x -re van értelme, és közülük $\sqrt{4x^2 + 3}$ a legnagyobb.

A háromszög akkor létezik, ha teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenség feltételei, azaz ha

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} > \sqrt{4x^2 + 3}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, azért ez az egyenlőtlenség ekvivalens a következő, négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenségekkel:

$$2x^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2 + 1)^2 - x^2} > 4x^2 + 3, 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} > 2x^2 + 1, 4x^2 + 4x^2 + 4 > 4x^4 + 4x^2 + 1.$$

Mivel ez utóbbi minden valós x -re teljesül, azért a háromszögek minden valós x esetén léteznek. E háromszögek területe független x -től, hiszen

$$16T^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2, 16T^2 = 4(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) - (2x^2 + 2 - 4x^2 - 3), 16T^2 = 4(x^4 + x^2 + 1) - (4x^4 + 4x^2 + 1)$$

Rábai Imre