A legmegszokattabb számok az egész számok és a törtek. Ezeket együttesen *racionális számoknak* nevezzük. Tanulmányaink során a legelső nem racionális szám, amellyel találkozunk, a π, a kör kerületének és átmérőjének aránya. Az is megtörténik, hogy a tanórán közlik, hogy a π nemcsak irracionális, hanem *transzcendens*. Természetesen ennek bizonyítása nem szerepel, de jószerivel az sem válik világossá, mik azok a transzcendens számok. Az is előfordul, hogy megemlítik, az e (a természetes logaritmus alapszáma) ugyancsak transzcendens.

Minden bizonnyal $\sqrt{2}$ az első olyan szám, amelyről be is bizonyítják, hogy irracionális, vagyis nem állítható elő két egész szám hányadosaként. Általában is igaz, hogy a „gyökös kifejezések" irracionálisak. Ezek a gyökös kifejezések azért annyiból egyszerűek, hogy valamilyen egész együtthatós polinomjuk 0-t ad. Ha például nézzük az $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ számot, akkor erre $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$ adódik.

Az olyan számokat, amelyek gyökei egy – nem triviális – egész együtthatós polinomnak, algebrai számoknak nevezzük. (Triviális az a polinom, amelynek minden együtthatója 0. E polinomnak minden szám gyöke.) Ne gondoljuk azt, hogy algebrai szám ugyanazt jelenti, mint gyökös kifejezés. Például az $x^5 - 4x + 2$ polinom gyökei definíció szerint algebrai számok, de egyiküket sem lehet kifejezni az egész számokból a négy alapművelet és gyökvonások segítségével. De térjünk vissza a transzcendens számokhoz.

Transzcendenseknek azokat a számokat nevezik, amelyek nem algebraiak.

Egy transzcendens számot nehéz „elképzelni". Pedig „nagyon sokan vannak". Ha egy tizedestört számjegyeit egymás után véletlenszerűen határozzuk meg, akkor biztosan transzcendens számot kapunk a végén. Csak persze nincs „vége". A π vagy az e transzcendenciájának bizonyítása komoly segédeszközöket igényel. Egyébként a π transzcendeciájából következik, hogy egy egységnyi oldalú négyzettel azonos területű kör nem szerkeszthető körző és vonalzó „szabályos" felhasználásával.

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy viszonylag egyszerűen beláthatjuk bizonyos számokról, hogy azok transzcendensek. Sőt, mi több, olyan számokat adunk meg, amelyeket egész könnyen le lehet írni (mármint a szám jegyeit szolgáló eljárást). Sokan próbálkoztak a π jegyeinek egymásutáni meghatározásával; az egyik ilyen próbálkozó személyéről nevezték el Ludolf-féle számnak. Természetesen a próbálkozásokat mindig „elölről" kell kezdeni. Nem lehet az első – mondjuk – ötmillió jegy figyelembe vétele nélkül megadni az ötmillióegyediket. De hasonló igaz a $\sqrt{2}$ jegyeinek a meghatározására is.

Azon számok, az úgynevezett *Liouville*-számok esetében, amelyeket itt fogunk megadni, bármelyik jegyet meg lehet mondani anélkül, hogy ehhez a többi jegyre szükség volna. E számok megkonstruálásánál (pontosabban a transzcendencia bizonyításánál) a racionális számokkal való *approximációra* van szükség. Egy α valós számot törttel approximálni (közelíteni) azt jelenti, hogy a számhoz közel találunk egy törtet. Tulajdonképpen ennél többről van szó, egyre közelebb levő törtet kell találni. Példaképpen szerepeljen itt a következő eljárás:

„Ha x közel van a $\sqrt{a}$-hoz, akkor $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sokkal közelebb van". Az $a = 2$ esetben $\sqrt{2} \approx 1,41421356\ldots$. Ha a $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$ közelítést vesszük, akkor az egymásutáni értékek: $\frac{17}{12}$, $\frac{577}{408}$, $\frac{665857}{470832}$, … stb. Az ezekre adódó tizedestörtek: $1,5$; $1,41667\ldots$; $1,414216\ldots$; $1,41421356237\ldots$ stb. Láthatjuk, hogy itt minden lépésben nagyjából megduplázódik a helyes jegyek száma. Ez annak a következménye, hogy a „közelítő" $\frac{p}{q}$ tört $\sqrt{2}$-től való eltérése kisebb, mint $\frac{1}{q^2}$. Bizonyítható, hogy ez a jelenség lépésről lépésre öröklődik. Ezt tekinthetjük „jó közelítésnek".

Érdekes jelenség, hogy a racionális számokat nem lehet racionális számokkal jól közelíteni (persze nincs is rá szükség), míg az irracionális számokat lehet. Ez a megfigyelés a kiindulása a transzcendens számok konstruálásának (illetve transzcendenciájuk bizonyításának). Megjegyezzük azonban, hogy a transzcendencia bizonyításához „a jó közelíthetőség" tételéhez nincs szükség.

Tétel. *Az α valós számhoz pontosan akkor található végtelen sok olyan (különböző) $\frac{p}{q}$ tört, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, ha α irracionális.*

Bizonyítás. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy akármilyen q esetén az ilyen nevezőjű törtek közül legfeljebb kettő közelítheti meg α-t jobban, mint $\frac{1}{q}$, egyik „balról", másik „jobbról". Ha adott egy N természetes szám, akkor – hasonlóképpen – legfeljebb $2N$ darab olyan N-nél kisebb nevezőjű tört van, amely a nevező reciprokánál közelebb van α-hoz.

Legyen most először $\alpha = \frac{a}{b}$ racionális szám. Ha $\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}$, akkor ebből $|aq - bp| \le \frac{b}{q}$ következik. A $q > b$ esetben tehát $|aq - bp| < 1$; ami csak úgy lehet, hogy $aq = bp$ (vagyis $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$), hiszen -1 és 1 között 0 az egyetlen egész szám. Az előzetes megjegyzés szerint b-nél nem nagyobb nevezőjű jól közelítő tört véges sok van, b-nél nagyobb nevezőjű pedig egy, így a jól közelítő törtek száma véges.

Legyen most α egy irracionális szám. Itt is egy előzetes megjegyzéssel kezdjük. Tekintsünk egy N természetes számot, és nézzük a 0α, 1α, 2α, …, $(N-1)\alpha$, $N\alpha$ számok törtrészét. Példaként álljon itt az $\alpha = \sqrt{2}$ és $N = 5$ eset:

$\{0\sqrt{2}\}$	$\{1\sqrt{2}\}$	$\{2\sqrt{2}\}$	$\{3\sqrt{2}\}$	$\{4\sqrt{2}\}$	$\{5\sqrt{2}\}$
0	$0,4142\ldots$	$0,8284\ldots$	$0,2426\ldots$	$0,6568\ldots$	$0,0710\ldots$

A számokat rakjuk nagyság szerint sorba:

$$0; \quad 0,0710; \quad 0,2426; \quad 0,4142; \quad 0,6568; \quad 0,8284.$$

Látható, hogy a sorban két olyan lépés is van, amikor az ugrás kisebb, mint $0,2 = \frac{1}{5}$. Egy ilyen „kis ugrás" minden irracionális számnál fellép. Rakjuk sorba nagyság szerint a

$$\{0\alpha\},\ \{1\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \ldots,\ \{(N-1)\alpha\},\ \{N\alpha\}$$

számokat. Ez $N+1$ darab szám, amelyek mind a $[0,\ 1)$ intervallumba esnek, és az elsőt kivéve egyikük sem racionális, hiszen α sem az. Osszuk most fel a $[0,\ 1]$ intervallumot a $0,\ \frac{1}{N},\ \frac{2}{N},\ \ldots,\ \frac{N-1}{N},\ \frac{N}{N}$ osztópontokkal $\frac{1}{N}$ hosszúságú részintervallumokra. Ezeknek az intervallumoknak a száma N. A skatulya-elv szerint tehát van olyan intervallum, amelybe a fenti $N+1$ szám közül kettő is jut. Van tehát olyan nemnegatív $k,\ \ell \le N$, amelyre $\{k\alpha\} < \{\ell\alpha\}$ (egyenlők nem lehetnek, mert α irracionális), továbbá $\{\ell\alpha\} - \{k\alpha\} < \frac{1}{N}$ (α irracionalitása miatt itt sem lehet egyenlőség). A törtrészekre vonatkozó elemi összefüggések alapján ebből $0 < \{(k-\ell)\alpha\} < \frac{1}{N}$ következik. Legyen $q = k - \ell$. $0 \le k,\ \ell \le N$ miatt $|q| \le N$. A kapott $\{q\alpha\} < \frac{1}{N}$ összefüggés a következőt jelenti:

Vannak olyan pozitív $q \le N$ és p egész számok, amelyekre $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$.

Az is feltehető, hogy p és q relatív prímek. Hiszen, ha pu és qu megfelelnek, azaz, ha $|qu\alpha - pu| < \frac{1}{N}$, akkor u-val osztva azt kapjuk, hogy $|q\alpha - p| < \frac{1}{Nu} < \frac{1}{N}$; és persze $q \le qu < N$.

Ebből már azonnal következik az, hogy $\frac{p}{q}$ jól közelíti α-t. Valóban, felhasználva a $0 < q \le N$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \le \frac{1}{q^2}.$$

Még azt kell belátni, hogy végtelen sok ilyen tört van. Ez azt jelenti, hogy akármennyi megfelelő törtet veszünk is, mindig található ezektől különböző jól közelítő tört.

Tegyük fel, hogy $\frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q_n}$ megfelelő közelítő törtek, vagyis a $|q_i\alpha - p_i| = \varepsilon_i$ pozitív számokra $\varepsilon_i < \frac{1}{q_i}$ ($i = 1,\ \ldots,\ n$), továbbá p_i és q_i bármely i esetén relatív prímek. Mivel az ε_i számok pozitívak, ezért van olyan N természetes szám, amely nagyobb, mint ezek bármelyikének a reciproka, vagyis bármely i esetén $\frac{1}{N} < |q_i\alpha - p_i|$. A fenti eljárást erre az N-re végezve a kapott p és q számokkal $|q\alpha - p| < \frac{1}{N} < |q_i\alpha - p_i|$ adódik. Ez az egyenlőtlenség nyilván akkor is fennáll, ha p és q legnagyobb közös osztójával egyszerűsítünk. Így $\frac{p}{q}$ nem egyezhet meg a már figyelembe vett törtek egyikével sem, tehát újabb törtet kaptunk.

Ezekután bebizonyítjuk *Liouville*-nek azt a tételét, amelyik azt mondja ki, hogy az algebrai számok nem közelíthetők nagyon jól racionális számokkal.

Tétel. *Ha α gyöke egy egész együtthatós n-edfokú polinomnak, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a bizonyításhoz valójában nincs szükség az előző tételre. Az is világos, hogy ez a tétel az $n = 1$ esetben pontosan azt adja, hogy a racionális számok nem approximálhatóak jól.

Mint az előző tételben is láttuk, ha a pozitív q kisebb egy előre megadott N számnál, akkor legfeljebb véges sok törtre lehet $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$.

Tegyük fel, hogy α gyöke az egész együtthatós $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomnak, ahol $a_n \ne 0$. Az $f(x)$ polinomnak legfeljebb n gyöke lehet, ezért csak véges sok racionális gyöke van (0 darab is véges sok!). A fenti N számot megválaszthatjuk úgy, hogy az itt szóbajövő törtek nevezőjénél is nagyobb legyen.

Most további törteket fogunk kizárni. Ha $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge 1$, akkor a megkivánt egyenlőtlenség nem állhat fenn, ezért feltehető, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$. Ebből azonnal következik, hogy $\alpha - 1 < \frac{p}{q} < \alpha + 1$, vagyis $\left|\frac{p}{q}\right| < |\alpha| + 1$.

Tekintsünk most egy $\frac{p}{q}$ törtet, ami nem gyöke az $f(x)$ polinomnak. Ez azt jelenti, hogy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 \ne 0. \tag{1}$$

A tagokat közös nevezőre hozva és összeadva egy olyan törtet kapunk, amely nem 0, a számlálója egész szám és a nevezője q^n. Ez pedig azt jelenti, hogy e tört abszolút értéke legalább $\frac{1}{q^n}$, tehát

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{2}$$

Tudjuk viszont, hogy $f(\alpha)=0$. Ezért $f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = f\left(\frac{p}{q}\right)$ következtében

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{3}$$

(3) bal oldalát átalakítva olyan összeghez jutunk, amelynek tagjai $a_i\left(\left(\frac{p}{q}\right)^i - \alpha^i\right)$ alakúak. Minden egyes ilyen tagból kiemelhető $\left(\frac{p}{q}\right) - \alpha$. Ezért a bal oldalon kiemelhető ez a tényező és egy olyan $F\left(\frac{p}{q},\ \alpha\right)$ polinom marad, amelynek az együtthatói az $f(x)$ együtthatóiból készíthetők el. Ezek után megvizsgáljuk (3) bal oldalának az abszolút értékét, amire

$$\left|F\left(\frac{p}{q},\ \alpha\right)\right| \cdot \left|\left(\frac{p}{q}\right) - \alpha\right| \geq \frac{1}{q^n} \tag{4}$$

adódik. Most a bal oldal első tényezőjét növelni fogjuk. Ez a tényező

$$\beta_i = a_i \left[\sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{p}{q}\right)^j \alpha^{i-1-j}\right] \tag{5}$$

alakú tagok összege. Felhasználjuk azt, hogy az összeg abszolút értéke legfeljebb akkora, mint a tagok abszolút értékének az összege és a szorzat abszolút értéke megegyezik a tényezők abszolút értékének a szorzatával. A szóbanforgó tényező tehát legfeljebb $|\beta_0| + \cdots + |\beta_n|$. Most egy-egy β_i értékét fogjuk felülről becsülni. Legyen A az a_i-k abszolút értékének a maximuma. $\left|\frac{p}{q}\right| \leq |\alpha| + 1$ és a triviális $|\alpha| \leq |\alpha| + 1$ alapján (5)-ben $|\beta_i| \leq A \cdot i \cdot (|\alpha|+1)^{i-1}$ adódik. Mivel $|\alpha| + 1 \geq 1$, ezért tovább növelünk, ha mindegyik $(|\alpha|+1)^{i-1}$ helyébe $(|\alpha|+1)^n$-t írunk. A vizsgált tényezőben összesen $n + (n-1) + \cdots + 1 < n^2$ tag van, ezért a vizsgált tényező legfeljebb

$$K = n^2 \cdot A \cdot (|\alpha|+1)^n. \tag{6}$$

Ez a K szám nem függ (a „megmaradt") $\frac{p}{q}$ törtektől, csak az előre magadott $f(x)$ polinomtól és az α számtól. Azt kaptuk tehát, hogy vannak olyan K, N számok, hogy ha $q > N$, akkor

$$K \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n}.$$

Ha mármost az M számot úgy választjuk, hogy $M > K$ és M nagyobb a fentebb választott N számnál is; továbbá olyan q-t választunk, amelyre $q > M$, akkor a legutóbbi egyenlőtlenségből

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{n+1}} \tag{7}$$

adódik. Eszerint csak véges sok olyan tört létezik, amelyikre (7) nem teljesül.

Az előbbi tétel segítségével előállíthatunk végtelen sok transzcendens számot, az úgynevezett *Liouville* számokat.

Tétel. Tetszőleges $m > 1$ természetes számra létezik az

$$\alpha_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n!}} \tag{$*$}$$

végtelen összeg, amely transzcendens számot állít elő.

Bizonyítás. Azt kellene mindenekelőtt bizonyítani, hogy a fenti „végtelen összeg" értelmesen definiálható. Ez nem okozna túl nagy nehézséget, de könnyen értelmezhető az $m = 10$ esetben. Azért választjuk ezt az esetet, mert számrendszerünk alapszáma 10. Hasonló eljárás alkalmazható minden más m esetében, ha az m alapú számrendszerben dolgozunk.

Legyen tehát $\alpha = \alpha_{10}$. A $(*)$ felírás most egy végtelen tizedestörtet szolgáltat. Ebben a tizedestörtben az i-edik helyen 1 áll, ha alkalmas n természetes számra $i = n!$ (0 nem természetes szám), a többi helyen pedig 0 áll. A kapott szám tehát

$$\alpha = 0,1100010000000000000000000100\ldots$$

alakú. Most tetszőleges $k > 2$ egész számra értelmezzük a $\dfrac{p_k}{q_k} = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{m^{n!}}$ „közelítő" törteket. Ha közös nevezőre hozunk és úgy adunk össze, akkor $q_k = 10^{k!}$ adódik, míg p_k utolsó számjegye 1 lesz. Ezért a fenti tört már egyszerűsíthetetlen alak.

Nézzük ezután a $\gamma_k = \alpha - \dfrac{p_k}{q_k}$ különbséget. Ez egy olyan tizedestört, amelyben az első 0-tól különböző jegy a $(k+1)!$-adik helyen szerepel és a további jegyek között szerepel a 0 is. Ezért biztosan kisebb annál a racionális számnál, amelyben eggyel előbb szerepel 1, és minden más helyen 0 áll:

$$\gamma_k < \frac{1}{10^{(k+1)!-1}}.$$

Mivel $(k+1)! - 1 = k \cdot k! + (k! - 1) < k \cdot k!$, ezért $\gamma_k < \dfrac{1}{(q_k)^k}$.

Legyen most n rögzített és tekintsük az összes $k > n+1$ számot. Ezekre

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \gamma_k < \frac{1}{(q_k)^k} \leq \frac{1}{(q_k)^{n+1}}$$

teljesül. Ezek a törtek mind különbözőek, mert rövidíthetetlen alakban vannak megadva, és ezek különböznek. Eszerint α bármely n-re végtelen sokszor „jól közelíthető", tehát egyetlen n-re sem lehet gyöke egy nem azonosan 0 egész együtthatós polinomnak; α tehát transzcendens.

Fried Ervin