Firbáss Oszkár igazgató úr (Szeged, Baross Gábor Gimnázium) emlékére

1. Igazolja, hogy minden háromszögben

$$16T^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai, T pedig a háromszög területe.

Hogyan kaphatjuk ebből az állításból a Heron-képletet? ($T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, ahol $2s = a + b + c$.)

2. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

egyenletet!

3. Igazolja a következő azonosságot:

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_x abc.$$

(a, b, c és x 1-től különböző pozitív valós számok.)

4. Igazolja, hogy minden valós x-re léteznek azok a háromszögek, amelyek oldalai

$$a = \sqrt{x^2 - x + 1}, \qquad b = \sqrt{x^2 + x + 1}, \qquad c = \sqrt{4x^2 + 3}.$$

Igazolja, hogy minden ilyen háromszög területe egyenlő, és a terület független x-től. (Felhasználhatja az 1. feladat állítását.)

Rábai Imre