1. *a)* Ha (a_n) számtani sorozat, akkor $a_n = a_1 + (n-1)d$, azaz $a_n = (d)n + (a_1 - d)$; ha $a_n = An + B$, akkor $a_{n-1} = A(n-1) + B$, és így $a_n - a_{n-1} = A$, tehát a sorozat számtani.

b) Ha (a_n) számtani sorozat, akkor $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, azaz valóban fennáll, hogy $S_n = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$;

ha pedig $S_n = Kn^2 + Ln$, akkor $S_{n-1} = K(n-1)^2 + L(n-1)$, és így $a_n = S_n - S_{n-1} = (2K)n + (L-K)$, azaz a sorozat valóban számtani.

2. Dolgozhatunk vektorokkal. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ $(|\mathbf{a}| = a)$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ $(|\mathbf{b}| = b)$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ $(|\mathbf{c}| = c)$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$ $(|\mathbf{d}| = d)$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}$ $(|\mathbf{e}| = e)$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{f}$ $(|\mathbf{f}| = f)$; ekkor $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{e} = -\mathbf{c}-\mathbf{d}$; $\mathbf{f} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{f} = -\mathbf{a}-\mathbf{d}$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{cd} + \mathbf{d}^2$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{bc} + \mathbf{c}^2$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ad} + \mathbf{d}^2$.

Ezekből, figyelembe véve, hogy $\mathbf{b}+\mathbf{d} = -(\mathbf{a}+\mathbf{c})$:

$$2(\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2) + 2(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{b}+\mathbf{d}),$$
$$\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{c})^2,$$
$$\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 - 2\mathbf{ac}.$$

Ha a négyszög trapéz, akkor az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok párhuzamosak és ellentétes az irányításuk, tehát

$$\mathbf{ac} = |\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos 180^\circ = -|\mathbf{a}||\mathbf{c}| = -ac,$$

tehát

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Ha $e^2+f^2 = b^2+d^2+2ac$, akkor mivel a fentiek szerint $\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2 = \mathbf{b^2}+\mathbf{d}^2-2\mathbf{ac}$, $2ac = -2\mathbf{ac}$, azaz $2ac = -2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|\cos\varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok szöge. Most

$$2ac = -2ac\cos\varphi, \qquad \cos\varphi = -1, \qquad \varphi = 180^\circ,$$

tehát $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$, azaz a négyszög valóban trapéz.

3. Ha egy egyenlő szárú háromszög alapja x, az alapon fekvő szög α, akkor a magassága $m = \frac{1}{2}\cdot x \cdot \operatorname{tg}\alpha$, területe $T = \frac{1}{2}\cdot x \cdot \frac{x}{2}\cdot \operatorname{tg}\alpha$, $T = \frac{x^2}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

Ennek alkalmazásával:

$$T_{ABC} + T_{A_1BC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha + \frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\alpha)(a^2 + 2bc\cos\alpha), T_{AB_1C} + T_{ABC_1} = \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\alpha)(b^2+c^2).$$

A koszinusztétel szerint $a^2 + 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2$, tehát igaz az állítás.

4. Ismeretes, hogy $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ és $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

$$\begin{aligned}
&2+7+14+\dots+(n^2+2n-1) = \\
&= (1^2+2\cdot1-1)+(2^2+2\cdot2-1)+(3^2+2\cdot3-1)+\dots+(n^2+2n-1) = \\
&= (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)+2(1+2+3+\dots+n)-n\cdot1 = \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n = \frac{n}{6}(2n^2+9n+1).
\end{aligned}$$

Rábai Imre