B. 3394. *Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor szerkeszthető a, b és c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4).$$

Megoldás. Tudjuk, hogy az a, b és c hosszúságú oldalakkal pontosan akkor szerkeszthető háromszög, ha

$$a+b>c; \qquad b+c>a \qquad \text{és} \qquad a+c>b.$$

Ezért, ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$a+b-c>0, \qquad b+c-a>0 \quad \text{és} \quad a+c-b>0,$$

és ekkor nyilván

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)>0 \tag{2}$$

is teljesül.

Megmutatjuk, hogy ha három pozitív valós számra fennáll a (2) egyenlőtlenség, akkor teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek is:

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük ugyanis, hogy $a \ge b \ge c$. Ha (2) igaz, akkor a bal oldal három tényezője közül vagy egy pozitív és a két másik negatív, vagy pedig mindhárom tényező pozitív. Az első esetben, mivel az $a+b-c$ tényező a legnagyobb, csak ez lehet a pozitív, és

$$b+c-a<0, c+a-b<0, 2c<0, \text{összeadva}$$

így $c<0$ volna, ami ellentmondás. Tehát valóban csak az az eset állhat fenn, amikor

$$a+b>c, \qquad b+c>0, \qquad a+c>b.$$

A (2) egyenlőtlenséggel azonban ekvivalens a következő:

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0, \tag{3}$$

hiszen a (2) egyenlőtlenség mindkét oldalát egy pozitív tényezővel, $a+b+c>0$-val szoroztuk.

(3) pedig a szorzások elvégzése után némi átalakítással az ekvivalens

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$$

alakra hozható. Tehát pontosan akkor szerkeszthető az a, b, c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül az (1) egyenlőtlenség.

A B. 3394. feladat egy általánosítása

A feladatban azt kellett bizonyítani, hogy a pozitív a, b, c számokhoz pontosan akkor létezik a, b, c oldalú háromszög, ha

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4). \tag{1}$$

M. S. Klamkin egy általánosítási lehetőséget vizsgált [1] cikkében:

Tétel. *Ha az a_1, a_2, $\dots$, a_n pozitív számokra ($n \ge 3$ egész szám) teljesül az*

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4) \tag{2}$$

egyenlőtlenség, akkor közülük bármely három a_i, a_j és a_k hosszúságú szakaszból szerkeszthető háromszög. ($i \ne j \ne k$, $1 \le i, j, k \le n$, $i, j, k \in \mathbf{N}$)

Figyeljük meg, hogy ez a tétel csak egyik irányban általánosítása az (1) egyenlőtlenségnek: elegendő feltételt ad arra, hogy n darab szakasz közül tetszőlegesen kiválasztott háromból lehessen háromszöget szerkeszteni. A (2) egyenlőtlenség nem szükséges, ezt mutatja például az $a_1=5$, $a_2=5$, $a_3=5$, $a_4=9$ számnégyes. E számokra nem teljesül a (2) egyenlőtlenség, míg az 5, 5, 5 és 9 egység hosszúságú szakaszok közül bármely háromból szerkeszthető háromszög.

Nézzük most, hogyan bizonyította *M. S. Klamkin* a fenti tételt:

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n=3$-ra éppen a **B. 3394.** feladat állítását kapjuk. Legyen most $n>3$, és tegyük fel, hogy fennáll (2). Azt mutatjuk meg, hogy (2)-ből következik az

$$(a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2)^2 > (n-2)(a_2^4+a_3^4+\dots+a_n^4) \tag{3}$$

egyenlőtlenség. Elemi algebrai lépések és teljes négyzetté alakítás után (2)-ről látható, hogy ekvivalens az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$0 > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2 - \frac{\left(S_2^2 - (n-2)S_4\right)(n-1)}{(n-2)^2}, \tag{4}$$

ahol $S_m = a_2^m + a_3^m + \cdots + a_n^m$. Így (2)-ből valóban következik (3). Az indukciós feltevés szerint így bármely három szakaszból szerkeszthető háromszöög, ha a szakaszok egyike sem a_1. De a_1-et tetszőlegesen választottuk, így a tételt igazoltuk.

A továbbiakban megvizsgáljuk a bizonyításban említett elemi algebrai lépéseket. A (2) egyenlőtlenségben az a_2, a_3, …, a_n számok m-edik hatványösszegét S_m-mel jelölve ($m = 2$, illetve 4)

$$(a_1^2 + S_2)^2 > (n-1)(a_1^4 + S_4).$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$$\begin{aligned} a_1^4 + 2a_1^2 S_2 + S_2^2 &> (n-1)a_1^4 + (n-1)S_4 \\ 0 &> (n-2)a_1^4 - 2a_1^2 S_2 - S_2^2 + (n-1)S_4 \qquad (5) \end{aligned}$$

adódik. A továbbiakban elosztjuk az egyenlőtlenséget a pozitív $(n-2)$ számmal, majd ígéretünk szerint teljes négyzetté alakítunk.

$$0 > a_1^4 - \frac{2a_1^2 S_2}{n-2} - \frac{S_2^2}{n-2} + \frac{(n-1)S_4}{n-2},$$

$$0 > \left(a_1^4 - \frac{2a_1^2 S_2}{n-2} + \frac{S_2^2}{(n-2)^2}\right) - \frac{S_2^2}{(n-2)^2} - \frac{S_2^2}{n-2} + \frac{(n-1)S_4}{(n-2)}$$

$$0 > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2 - \frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4).$$

Ez pedig valóban a (4) egyenlőtlenség.

A megfordításhoz írjuk (4)-et az alábbi alakba:

$$\frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4) > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2.$$

Innen

$$\frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4) > 0$$

és így valóban

$$S_2^2 - (n-2)S_4 > 0.$$

Megkaptuk a (3)-as egyenlőtlenséget; (3) és (4) tehát valóban ekvivalensek. Feltételezhetően *M. S. Klamkin* körülbelül erre a levezetésre gondolt.

Klamkin [1] cikkében megemlíti, hogy ha $n > 3$, akkor megoldatlan probléma olyan polinom-egyenlőtlenség megadása, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy n darab adott szakasz közül bármely hármat kiválasztva háromszöget lehessen szerkeszteni belőlük.

Klamkin másik nyitott problémája az, hogy adjuk meg polinom-egyenlőtlenség formájában annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az a_1, a_2, …, a_r pozitív számokból bárhogyan kiválasztva r darabot $(3 < r < n)$ ezek egy r oldalú sokszög oldalainak hosszai legyenek.

Irodalom

[1]Klamkin, Murray S., Simultaneous Triangle Inequalities, *Mathematics Magazine*, **60** (1987), No. 4., 236–237.

Köszönöm szépen dr. Pintér Lajos tanár úrnak (JATE, Bolyai Intézet, Szeged), hogy elküldte az [1] *cikket.)*

Csete Lajos
Markotabödöge