

1. Vezessünk be új változót. Legyen $x(x-1) = u$, $2x+3y = v$. Ekkor $u \cdot v = 26$ és $u+v = 15$. Innen $u = 2$, $v = 13$ vagy $u = 13$, $v = 2$, azaz $x(x-1) = 2$, $2x+3y = 13$ vagy $x(x-1) = 13$, $2x+3y = 2$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -1$, $y_2 = 5$; $x_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{53})$, $y_3 = \frac{1}{3}(12 - \sqrt{53})$; $x_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{53})$, $y_4 = \frac{1}{3}(12 + \sqrt{53})$.

2. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$, ekkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{a} + \mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{d}$).

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ és $\mathbf{d} = -\mathbf{b}$, tehát $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \mathbf{a}(-\mathbf{d}) + (-\mathbf{a})\mathbf{b} + (-\mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{d}(-\mathbf{c}) = \mathbf{ab} - \mathbf{ab} + \mathbf{ab} - \mathbf{ab} = 0$.

Ha $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, akkor $\mathbf{a}(-\mathbf{d}) + (-\mathbf{a})\mathbf{b} + (-\mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{d}(-\mathbf{c}) = 0$, tehát $(\mathbf{a} + \mathbf{c})(-\mathbf{b} - \mathbf{d}) = 0$. Mivel $-\mathbf{b} - \mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, azért $(\mathbf{a} + \mathbf{c})^2 = 0$; $((\mathbf{b} + \mathbf{d})^2 = 0)$, $\mathbf{a} = -\mathbf{c}$; $(\mathbf{b} = -\mathbf{d})$, azaz a négyszög paralelogramma.

3. Az egyenlet $(\operatorname{tg} x)$ -re másodfokú. A diszkriminánsra $D = 4(\sin y + \cos y)^2 - 4 \cdot 2 \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, tehát $1 + \sin 2y \geq 2$, $\sin 2y \geq 1$, azaz $\sin 2y = 1$, $y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ vagy $y = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$.

Ha $y_{1,n} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, akkor $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$, $x_{1,k} \approx 2,186 + k\pi$, ha $y_{2,n} = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$, akkor $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, $x_{2,k} \approx 0,955 + k\pi$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

4. Jelölje a trapéz hegyesszögét $2x$ ($0 < x < \frac{\pi}{4}$). Ekkor a hosszabb párhuzamos oldal $2 \operatorname{ctg} x$, a rövidebb párhuzamos oldal $2 \operatorname{tg} x$, a trapéz szára $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x$, a trapéz magassága 2 egység.

A forgástest felszínét két egybevágó kúppalást és egy hengerpalást alkotja, a forgástest térfogata két forgáskúp és egy forgáshenger térfogatának az összege.

Az $A(x)$ felszín:

$$A(x) = 2 \cdot 2\pi(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 2 \cdot 2\pi \cdot 2 \operatorname{tg} x, A(x) = 4\pi(3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

A $V(x)$ térfogat:

$$V(x) = 2 \cdot \frac{4\pi(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)}{3} + 4\pi \cdot 2 \operatorname{tg} x, V(x) = \frac{8\pi}{3}(2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

Ismeretes, hogy ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, az egyenlőség $a = b$ esetén teljesül.

$$A(x) = 4\pi(3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \geq 4\pi \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\pi.$$

A minimális felszín $8\sqrt{3}\pi$ területegység; ez akkor jön létre, ha $3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ és ($0 < x < \frac{\pi}{4}$), $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $2x = \frac{\pi}{3}$,

($2x = 60^\circ$). A minimális térfogat $V(x) = \frac{8\pi}{3}(2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \geq \frac{8\pi}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ térfogategység; ez akkor jön létre, ha $2 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, ahonnan $x \approx 35^\circ 15'$, tehát $2x \approx 70^\circ 30'$.

Rábai Imre