I. rész

A KöMaL 2000. szeptemberi számában tűztük ki a következő feladatot:

A. 244. *Egy számsorozatot nevezzünk Fibonacci-típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik eleme az előző kettő összege. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív egész számok halmaza felbontható olyan Fibonacci-típusú végtelen sorozatok uniójára, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös eleme.*

A cikk első részében közelebbről meg fogjuk vizsgálni a „Fibonacci-típusú" sorozatokat. Eközben a Fibonacci-sorozat néhány érdekes tulajdonságára is fény derül. A második részben, amely a KöMaL következő számában fog megjelenni, több különböző megoldást mutatunk a feladatra.

Terjedelmi okokból nem bizonyítunk precízen minden egyes állítást; lesznek olyanok, amelyek igazolását feladat formájában az Olvasóra hagyjuk. Ez azonban nem fog meggátolni minket abban, hogy a feladatként kimondott állításokat is felhasználjuk más állítások igazolásához.

A Fibonacci-sorozat

A természetes számokból álló sorozatok között az egyik legismertebb és legérdekesebb a Fibonacci sorozat. A sorozat elemei, a Fibonacci számok a legváltozatosabb és legmeglepőbb helyeken fordulnak elő, bukkannak fel nem csak a matematikában, de a természetben is. Bár a Fibonacci-sorozatot szinte minden középiskolás ismeri, nem árt újra felírni a definícióját. Különösen azért, hogy a továbbiakban az elemeket egységesen jelöljük és számozzuk.

A sorozatot a következő rekurzióval definiáljuk:

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1; \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{1}$$

A rekurzióból könnyen kiszámolhatjuk az első néhány Fibonacci-számot: $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, ...

Fibonacci-típusú sorozatok

Egyelőre egyetlen Fibonacci-típusú sorozatot láttunk: magát a Fibonacci-sorozatot. Először tehát nézzük meg, hogyan készíthetünk további ilyen sorozatokat. Egy lehetséges módszer, hogy a már ismert Fibonacci-típusú sorozatokból próbálunk újabbakat készíteni.

1. lemma. *Fibonacci-típusú sorozatot kapunk minden esetben, ha*

a) Egy Fibonacci-típusú sorozatnak elhagyjuk az első néhány elemét, vagy pedig olyan elemeket írunk elé, hogy a képzési szabály érvényes maradjon;

b)Egy Fibonacci-típusú sorozat összes elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal;

c)Néhány Fibonacci-típusú sorozat megfelelő elemeit összeadjuk.

1. feladat. *Bizonyítsuk be az 1. lemmát.*

Egy másik lehetőség, hogy az (1) rekurzióban más számokat választunk a sorozat első két elemének. A leghíresebb ilyen sorozat az úgynevezett Lucas-sorozat:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1},$$

de az első két elem helyére nyilván tetszőleges valós számokat írhatunk.

1. definíció. *Tetszőleges a, b valós számokra „az $(a,\ b)$ paraméterű Fibonacci-típusú sorozatnak" nevezzük azt a számsorozatot, amelyet a következő rekurzív képzési szabály definiál:*

$$F_0^{(a,\,b)} = a; \quad F_1^{(a,\,b)} = b; \quad F_{n+1}^{(a,\,b)} = F_n^{(a,\,b)} + F_{n-1}^{(a,\,b)} \quad (n \geq 1).$$

Ezzel a jelöléssel Fibonacci eredeti sorozata $F_n^{(0,\,1)}$, a Lucas-sorozat pedig $F_n^{(2,\,1)}$.

Világos, hogy az 1. definícióban felírt sorozatok az összes Fibonacci-típusú sorozatot tartalmazzák, hiszen az első két elem egyértelműen meghatározza a többit. Ennek egy másik fontos következménye, hogy ha két Fibonacci-típusú sorozatról be akarjuk bizonyítani, hogy ugyanazok, akkor elég az első két elemről ellenőrizni, hogy megegyeznek.

Ha elkezdjük formálisan felírni az $(F_n^{(a,\,b)})$ sorozat elemeit, érdekes dolgot vehetünk észre:

$$F_2^{(a,\,b)} = F_1^{(a,\,b)} + F_0^{(a,\,b)} = 1a + 1bF_3^{(a,\,b)} = F_2^{(a,\,b)} + F_1^{(a,\,b)} = 1a + 2bF_4^{(a,\,b)} = F_3^{(a,\,b)} + F_2^{(a,\,b)} = 2a + 3bF_5^{(a,\,b)} = F_4^{(a,\,b)} + F_3^{(a,\,b)}$$

Ezekből már megsejthetjük a következő tételt:

1. tétel. *a) A Fibonacci-sorozatból kiindulva, az 1. lemmában felsorolt lépésekkel bármelyik Fibonacci-típusú sorozatot előállíthatjuk.*

b) Tetszőleges a, b valós számokra az $(a,\ b)$ paraméterű Fibonacci-típusú sorozat elemei felírhatók a következő alakban:

$$F_n^{(a,\,b)} = F_{n-1}\cdot a + F_n \cdot b \quad (n \geq 1). \tag{2}$$

Bizonyítás. Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Ha a Fibonacci-sorozat elejére odaírjuk az 1-et, akkor az 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Fibonacci-típusú sorozatot kapjuk. Ha ennek a-szorosához hozzáadjuk a Fibonacci-sorozat b-szeresét, akkor a kapott sorozat az $a\cdot F_{n-1}+b\cdot F_n$ sorozat lesz. Ennek 0. eleme $a\cdot 1+b\cdot 0=a$, 1. eleme $a\cdot 0+b\cdot 1=b$, vagyis a sorozat nem más, mint az $(a,\ b)$ paraméterű Fibonacci-típusú sorozat. Az $(F_n^{(a,\,b)})$ sorozatot tehát elő tudtuk állítani az 1. lemmában leírt lépésekkel, az előállítást formálisan a (2) képlet írja le.

Fibonacci-típusú mértani sorozatok

A Fibonacci-sorozat nem mértani sorozat. Ha kiszámítjuk a szomszédos Fibonacci-számok hányadosát, láthatjuk, hogy a hányadosok különbözők:

$$\frac{1}{1}=1;\quad \frac{2}{1}=2;\quad \frac{3}{2}=1,5;\quad \frac{5}{3}\approx 1,667;\quad \frac{8}{5}=1,6;$$
$$\frac{13}{8}=1,625;\quad \frac{21}{13}\approx 1,615;\quad \frac{34}{21}\approx 1,6190;\quad \frac{55}{34}\approx 1,6176;\quad \ldots$$

Azt is láthatjuk azonban, hogy a hányadosok egyre közelebb vannak egy számhoz, amelynek tizedestört alakja $1,618$-del kezdődik.

Ugyanezt az eredményt kapjuk sok más Fibonacci-típusú sorozat esetében. Például a Lucas-sorozatra

$$\frac{3}{1}=3;\quad \frac{4}{3}\approx 1,333;\quad \frac{7}{4}=1,75;\quad \frac{11}{7}\approx 1,571;\quad \frac{18}{11}\approx 1,636;$$
$$\frac{29}{18}\approx 1,611;\quad \frac{47}{29}\approx 1,621;\quad \frac{76}{47}\approx 1,617;\quad \frac{123}{76}\approx 1,6184;\quad \ldots$$

A Fibonacci-típusú sorozatok tehát bizonyos értelemben hasonlítanak egy olyan mértani sorozatra, amelynek hányadosa ez a titokzatos $q=1,618\ldots$ szám.

A q szám pontos kiszámításához keressünk olyan mértani sorozatot, amelyik Fibonacci-típusú is. Legyen a sorozat első eleme a_1, hányadosa q. Ekkor tetszőleges n-re

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,$$
$$a_1q^{n+1}=a_1q^n+a_1q^{n-1},$$

azaz

$$q^2=q+1. \tag{3}$$

Ennek az egyenletnek két irracionális valós gyöke van: $q_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,618034$ és $q_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0,618034$. Tehát a keresett szám: $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Érdekesség, hogy egy másik Fibonacci-típusú mértani sorozatot is találtunk; ennek hányadosa a negatív $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. A q_2 hányadosú sorozatban egyre kisebb abszolút értékű számok szerepelnek, váltakozó előjellel.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

2. tétel. *Kétféle Fibonacci-típusú mértani sorozat létezik; ezeknek a hányadosa* $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, *illetve* $q_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Azt még nem tisztáztuk, hogy a Fibonacci-sorozat milyen értelemben hasonlít erre a q hányadosú mértani sorozatra; erre később, a 3. tételben térünk majd vissza.

A Fibonacci-sorozat és a $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ szám hatványai

Játsszunk most el egy kicsit a q számmal úgy, hogy csak a $q^2 = q + 1$ azonosságot használjuk fel. A q magasabb hatványait felírhatjuk $aq + b$ alakban:

$q^3 = q^2 \cdot q = (q+1)q = q^2 + q = (q+1) + q = 2q + 1; q^4 = q^3 \cdot q = (2q+1)q = 2q^2 + q = 2(q+1) + q = 3q + 2; q^5 = q^4 \cdot q = (3q +$

2. lemma. *Tetszőleges n pozitív egészre*

$$q^n = F_n q + F_{n-1}. \tag{4}$$

1. bizonyítás. Mivel (4) mindkét oldalán Fibonacci-típusú sorozat áll, ezért elég az első két elemre ellenőrizni.

$$n = 1: \qquad q = F_1 q + F_0 = q, n = 2: \qquad q^2 = F_2 q + F_1 = q + 1.$$

2. bizonyítás. Az $1, q, q^2, \ldots$ sorozat nem más, mint az $(1,\ q)$ paraméterű Fibonacci-típusú sorozat, ezért a 1. tétel szerint $n \geq 1$ esetén

$$q^n = F_n^{(1,\ q)} = F_{n-1} \cdot 1 + F_n \cdot q.$$

2. feladat. *Bizonyítsuk be a 2. lemmát teljes indukcióval is.*

Most már bebizonyíthatjuk, hogy a szomszédos Fibonacci-számok hányadosa q-hoz tart, sőt ennél kicsit többet.

3. feladat. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $n \geq 1$ esetén*

$$\frac{1}{3} q^n < F_n < \frac{1}{2} q^n.$$

3. tétel. *Tetszőleges n pozitív egészre*

$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - q \right| < \frac{1}{2F_n^2}.$$

Bizonyítás. A 2. lemma akkor is igaz marad, ha a q helyére a q_2 számot írjuk, tehát

$$F_{n+1} q_2 + F_n = q_2^{n+1}. \tag{5}$$

Akár a Viète-képletekből, akár közvetlenül könnyen ellenőrizhető, hogy $q_2 = \dfrac{-1}{q}$. Ezt beírva (5)-be és rendezve,

$$-\frac{F_{n+1}}{q} + F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{q^{n+1}},$$
$$\left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - q \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q^n F_n} \right| = \frac{1}{q^n \cdot F_n} < \frac{1}{2F_n^2}.$$

(Az utolsó lépésben a 3. feladat felső becslését használtuk fel.)

A 3. tétel nem csak annyit mond, hogy az $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ értéke „körülbelül" q; azt is állítja, hogy ez a becslés nagyon pontos: a hiba $\dfrac{1}{2F_n^2}$-nél kisebb.[1]

Hogyan készítsünk végtelen sok azonosságot a Fibonacci-számokkal?

A 2. lemma állítását felhasználhatjuk arra, hogy olyan azonosságokat gyártsunk, amelyekben a Fibonacci-számok szerepelnek. Ehhez először is szükség van a következő lemmára:

3. lemma. *Ha egy valós számot fel lehet írni $aq + b$ alakban alkalmas a, b egész számokkal, akkor ez a felírás egyértelmű. Más szóval, ha valamely a, b, c, d egész számokra $aq + b = cq + d$, akkor $a = c$ és $b = d$.*

Bizonyítás. Az egyenletet átrendezve $(a - c)q = d - b$. Mivel q irracionális, ez csak úgy lehetséges, ha $d - b = 0$ és $a - c = 0$.

---

[1] Ismeretes, hogy tetszőleges α irracionális számhoz végtelen sok olyan pozitív egész P, Q számpár létezik, amelyre $\left| \dfrac{P}{Q} - \alpha \right| < \dfrac{1}{2Q^2}$. Akik erről a témáról többet szeretnének tudni, azoknak ajánljuk, hogy olvassák el *Gyarmati Edit–Turán Pál:* Számelmélet c. jegyzetének *Diofantikus approximáció* c. fejezetét vagy *Erdős Pál–Surányi János:* Válogatott fejezetek a számelméletből c. könyvének *Racionális és irracionális számok. Számok megközelítése racionális számmal. (diofantoszi approcimáció)* c. fejezetét.

Írjunk most fel egy tetszőleges azonosságot q hatványaival, például azt, hogy $q^{n+k} = q^n \cdot q^k$, és helyettesítsük be a 2. lemmában látott kifejezéseket a hatványok helyére:

$$q^{n+k} = q^n \cdot q^k, F_{n+k} \cdot q + F_{n+k-1} = (F_n \cdot q + F_{n-1}) \cdot (F_k \cdot q - F_{k-1}), F_{n+k} \cdot q + F_{n+k-1} = F_n F_k \cdot q^2 + (F_n F_{k-1} + F_{n-1} F_k)q + F_{n-}$$

amiből az egyértelműség miatt például

$$F_{n+k-1} = F_n F_k + F_{n-1} F_{k-1}. \tag{6}$$

4. feladat. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval a* (6) *azonosságot.*

A Fibonacci-típusú sorozatok explicit alakja

Most a Fibonacci-típusú sorozatokat egy explicit, rekurzió nélküli formában fogjuk felírni. Ehhez az 1. lemma lépéseit fogjuk alkalmazni, de nem a Fibonacci-sorozatra, hanem az $1, q, q^2, \ldots$ és a $1, q_2, q_2^2, \ldots$ sorozatokra.

4. lemma. *Tetszőleges a, b valós számokhoz léteznek olyan c, d valós számok, amelyekre $a = c + d$ és $b = cq + dq_2$.*

Bizonyítás. A c és d kiszámításához csupán meg kell oldanunk a lineáris egyenletrendszert. Mint könnyen ellenőrizhető,

$$c = \frac{b - q_2 a}{q - q_2} \quad \text{és} \quad d = \frac{qa - b}{q - q_2}. \tag{7}$$

4. tétel. *Tetszőleges a, b valós számokra az $(a,\ b)$ paraméterű Fibonacci-típusú sorozat n-edik eleme felírható a következő alakban:*

$$F_n^{(a,\,b)} = cq^n + dq_2^n, \tag{8}$$

ahol $c = \dfrac{b - q_2 a}{q - q_2}$ *és* $d = \dfrac{qa - b}{q - q_2}$.

Bizonyítás. A (8) mindkét oldalán Fibonacci-típusú sorozat áll. Az egyenlőség az $n = 0$ és $n = 1$ esetekben a 4. lemma szerint teljesül.

A Fibonacci-sorozat paraméterei $(0,\ 1)$. Egy kis számolással kapjuk, hogy ezekre a számokra $c = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ és $d = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. Ezzel máris bebizonyítottuk a Fibonacci-sorozat explicit felírását:

5. tétel. *Tetszőleges n nem-negatív egész számra*

$$F_n = \frac{q^n - q_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

5. feladat. *Írjuk fel explicit alakban az n-edik Lucas-számot.*

6. feladat. *Az 1. tétel szerint, ha a Fibonacci-sorozatból indulunk ki, akkor az 1. lemma lépéseivel az összes Fibonacci-típusú sorozatot előállíthatjuk, nincs szükség több sorozatra. A 4. tételben miért nem volt elég csak az egyik sorozat? Magyarázzuk meg!*

A Fibonacci-számok és Fibonacci-típusú sorozatok explicit felírásának ismeretében nagyon sok azonosság bizonyítása egyszerűvé válik: csupán be kell helyettesítenünk az explicit képletet a bizonyítandó azonosságba. A számelméleti és kombinatorikus tulajdonságok bizonyításában, így az **A. 244.** feladat megoldásában azonban további ötletekre van szükség.

Énekes Béla, Kós Géza