

1. Legyen a sorozat első tagja  $a$ , hányadosa pedig  $q$ . Ekkor  $a(1 + q^2 + q^4) = 126$  és  $q(a(1 + q^2) - 30) = 0$ . Ha  $q = 0$ , akkor  $a = 126$ . Ha  $q \neq 0$ , akkor  $\frac{1 + q^2 + q^4}{1 + q^2} = \frac{126}{30}$ , ahonnan  $5q^4 - 16q^2 - 16 = 0$ ,  $q^2 = 4$  ( $q^2 = -\frac{4}{5}$  nem ad megoldást). Ha  $q = 2$ , akkor  $a = 6$ , ha  $q = -2$ , akkor is  $a = 6$ .

2. Mivel  $a > 0$ , azért  $\sqrt{4a+1} < \sqrt{4a^2+4a+1} = 2a+1$ . Hasonlóan  $\sqrt{4b+1} < 2b+1$  és  $\sqrt{4c+1} < 2c+1$ , tehát valóban

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 2a+1 + 2b+1 + 2c+1 = 2(a+b+c) + 3 = 9.$$

(A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával  $\sqrt{4a+1} = \sqrt{1 \cdot (4a+1)} \leq \frac{1+4a+1}{2} = 2a+1$ . Az egyenlőség most nem állhat fenn, hiszen  $1 = 4a+1$  akkor teljesül, ha  $a = 0$ , de a feladatban  $a$  pozitív.)

3. A  $P$  pont a  $BD$  átlóra illeszkedik, hiszen  $BPA\angle + DPA\angle = 180^\circ$ . Az  $ABP$ , az  $ADP$  és az  $ABD$  derékszögű háromszögek hasonlóak. A befogó- és a magasságtételt alkalmazva

$$10^2 = PD \cdot BD, \quad 20^2 = PB \cdot BD \quad \text{és} \quad PA^2 = PB \cdot PD.$$

Mivel  $BD = 10\sqrt{5}$ , azért  $PD = 2\sqrt{5}$ ,  $PB = 8\sqrt{5}$  és  $PA = 4\sqrt{5}$ .

A  $PC$  távolságot a  $PDC$  háromszögből a koszinusztétel alkalmazásával számíthatjuk ki. Legyen  $PDC\angle = \delta$ ,  $\cos \delta = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .  $PC^2 = (2\sqrt{5})^2 + 20^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 20 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $PC = 2\sqrt{65}$ .

4. a)  $x \neq 1$ ,  $x \neq -2$  és  $(x-1)^2(x+2)^2 = 4$ , vagyis  $(x-1)(x+2) = -2$  vagy  $(x-1)(x+2) = 2$ . A kapott  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ ,  $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$  számok az adott egyenletnek megoldásai.

b)  $x \neq 1$  és  $x > -2$ . Ennek az egyenletnek  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  a gyökei.

c) és d)  $x > 1$ . Ekkor  $x_3$  az egyetlen megoldás.

5. A koszinusztétel alkalmazásával  $c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cos \gamma$ , a háromszög területe pedig  $T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ . A feltétel szerint

$$\frac{1}{2}ab \sin \gamma = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}ab \cos \gamma,$$

ahonnan  $\operatorname{tg} \gamma = -\sqrt{3}$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Most  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ .

Mivel  $c = 2r \sin \gamma$ , azért  $\sqrt{a^2 + b^2 + ab} = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ . A háromszög köré írt kör sugara

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$

6. Az  $x^2 + 3ax - \frac{4}{3}b = 0$  egyenlet gyökei legyenek  $x_1$ ,  $x_2$ , az  $x^2 - a^2x - 2ab = 0$  egyenlet gyökei ekkor  $x_1 + 2$ ,  $x_2 + 2$ . A gyökök és az együtthatók összefüggése alkalmazásával

$$x_1 + x_2 = -3a, \quad x_1 x_2 = -\frac{4}{3}b \quad \text{és} \quad (x_1 + 2) + (x_2 + 2) = a^2, \quad (x_1 + 2)(x_2 + 2) = -2ab.$$

Innen  $-3a + 4 = a^2$ , tehát  $a = 1$  vagy  $a = -4$  és  $-\frac{4}{3}b - 6a + 4 = -2ab$ , ahonnan  $(3a - 2)(b - 3) = 0$ . Innen  $b = 3$ . Az első esetben az egyenletek  $x^2 - x - 6 = 0$ , illetve  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , a gyökök  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$ , illetve  $-4$ ,  $1$ ; a második esetben az egyenletek  $x^2 - 16x + 24 = 0$ , illetve  $x^2 - 12x - 4 = 0$ , a gyökök  $x_1 = 8 + 2\sqrt{10}$ ,  $x_2 = 8 - 2\sqrt{10}$ , illetve  $6 + 2\sqrt{10}$  és  $6 - 2\sqrt{10}$ .

7. Az egyenleteket  $2 \cos^3 x = -\sin y$ , illetve  $2 \sin^3 x = -\cos y$  alakban írhatjuk. Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát, majd adjuk össze az egyenleteket. Ekkor a  $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$  egyenletet kapjuk. Mivel  $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1$ ,  $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$  és  $\sin^2 2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha)$ , ezért  $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 4x$ , tehát  $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 4x = 1$ ,

$\cos 4x = -1$ ,  $4x = \pi + 2k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

a) Ha  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ , akkor  $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  és  $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y_1 = \frac{5\pi}{4}$ ;

b) ha  $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ , akkor  $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  és  $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y_2 = \frac{5\pi}{4}$ ;

$$c) \text{ ha } x_3 = \frac{5\pi}{4}, \text{ akkor } y_3 = \frac{\pi}{4};$$

$$d) \text{ ha } x_4 = \frac{7\pi}{4}, \text{ akkor } y_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

8. Mivel  $AB = 10$ , azért a hozzá tartozó  $m_c$  magasság 8 egység, hiszen  $\frac{10m_c}{2} = 40$ . Az  $AB$  egyenes egy irányvektora  $\mathbf{v}(8; 6)$ , egy normálvektora  $\mathbf{n}(3; -4)$ . A keresett  $C$  csúcspont a  $B$  ponttól  $4\sqrt{5}$  egységre van, így rajta van az  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 80$  egyenletű körön, és a  $BC$  egyenestől 8 egység távolságra van, így rajta van a  $3x - 4y + k = 0$  egyenletű egyenesen is, amely a  $B(-1; 3)$  ponttól 8 egységre van. Így  $8 = \frac{|-3 - 12 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ , ahonnan  $k = 55$  vagy  $k = -25$ .

A feltételeknek négy  $C$  pont felel meg.

A  $3x - 4y + 55 = 0$  egyenletű egyenes és az  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 80$  egyenletű kör metszéspontjai:  $C_1(-9; 7)$ ,  $C_2(-2, 6; 11, 8)$ , a  $3x - 4y - 25 = 0$  egyenletű egyenes és az  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 80$  egyenletű kör metszéspontjai:  $C_3(7; -1)$ ,  $C_4\left(\frac{3}{5}; -\frac{29}{5}\right)$ .

**Rábai Imre**