I. kategória: SzakközépiskolákElső (iskolai) forduló

1. Az $x^2 + ax + 1 - b = 0$ egyenletben az a és a b paraméterek valós számok. Igazolja, hogy ha az egyenlet gyökei pozitív egész számok, akkor $a^2 + b^2$ összetett szám.

2. Az ABC háromszög AC oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja B_1, az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja C_1. Legyen a D pont a BB_1 szakasz, az E pont pedig a CC_1 szakasz felezőpontja, továbbá az ABC háromszög területe T. Bizonyítsa be, hogy a $DBCE$ négyszög területe $\frac{4}{9}T$.

3. Az $ABCD$ négyzet oldalai 10 cm hosszúak. Legyen az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F, az EF szakasz felezőpontja M. A DA szakaszon felveszünk egy N, az DC szakaszon egy P pontot úgy, hogy $DN = DP$ teljesüljön. Hogyan kell az N és a P pontokat megválasztani, hogy az MNP háromszög területe a lehető legnagyobb legyen, és mekkora ez a terület?

4. Egy egyenlő szárú háromszög szögei α, β, γ. Mekkorák ezek a szögek, ha

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma.$$

5. Az ABC háromszög köré írható körhöz a B csúcsban érintőt húzunk, amely az A csúcstól 9 cm, a C csúcstól 25 cm távolságra halad. Milyen messze van a B csúcs az AC egyenestől?

6. Igazolja, hogy akárhogyan választunk is ki az első 1999 pozitív egész szám közül 1414 darabot, a kiválasztottak összege nem lehet egyenlő a ki nem választottak összegével!

Második forduló

1. Hányféleképpen kaphatunk összegül 2000-et, ha néhány darab (legalább 2) közvetlenül egymást követő pozitív egész számot adunk össze?

2. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB : BC = 3 : 2$. A paralelogramma AB oldalát hosszabbítsuk meg a B csúcson túl AB-vel, a kapott pontot jelöljük E-vel. Hasonlóképpen a BC oldalt hosszabbítsuk meg a C-n túl BC-vel, a CD oldalt D-n túl CD-vel, a DA oldalt pedig A-n túl DA-val. A kapott pontokat jelöljük rendre F-fel, G-vel, H-val. Meg lehet-e választani az $ABCD$ paralelogramma szögeit úgy, hogy az $EFGH$ négyszög téglalap legyen? Ha igen, akkor mekkorák ezek a szögek?

3. Az x_1 és az x_2 a $[0; 12]$ intervallum olyan valós számai, amelyekre teljesül, hogy

$$x_1x_2 = (12 - x_1)^2 \cdot (12 - x_2)^2.$$

Határozza meg az x_1x_2 szorzat legnagyobb értékét!

4. Bizonyítsa be, hogy

$$\lg 1 - \lg 2 + \lg 3 - \lg 4 + \cdots + \lg 99 - \lg 100 < -1.$$

5. Az $ABCD$ egy olyan négyzet, amelynek oldalai 2 egység hosszúságúak. Az AB oldalon van egy E pont, az AD oldalon egy F pont úgy, hogy az AEF háromszög területe $\frac{2}{3}$ területegységnyi, és az AEF háromszög kerülete pozitív egész szám. Mekkorák az AEF háromszög oldalai?

Harmadik (döntő) forduló

1. Milyen valós számok tesznek eleget az alábbi egyenletnek?

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}\cos(\pi x)\right] = \cos\left[\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] \tag{1}$$

2. Határozza meg az összes olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű számot, amelynek számjegyeire fennáll a

$$\sqrt[3]{\frac{3a-b}{2c}} - \sqrt[3]{\frac{250c}{3a-b}} = 4\sqrt[3]{\left(\frac{3a-b}{2c}\right)^2}$$

egyenlőség!

3. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD szemközti oldalegyeneseinek metszéspontját jelöljük P-vel, az AD és a BC oldalegyeneseinek metszéspontját jelöljük Q-val. Az $APD\sphericalangle$ szögfelezője a BC oldalt az F, az AD oldalt a H pontban metszi. A $BQA\sphericalangle$ szögfelezője a CD oldalt a G, az AB oldalt az E pontban metszi.

Bizonyítsa be, hogy az $EFGH$ négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög!

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumokElső (iskolai) forduló

1. Adjuk meg azokat az a és b természetes számokat, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

$$90 < a + b < 100, \tag{1}$$

$$0,9 > \frac{a}{b} < 0,91. \tag{2}$$

2. Legyen $a_n = 5^n + 7^n$ (n pozitív egész). Határozzuk meg a_{1999}-nek 216-tal való osztásakor kapott maradékát.

3. Az A és a B helységek között a távolság 200 km. Egy egyenes vonalú vasútvonal A-n megy át, és a B-hez legközelebbi pontja a B-től 87 km-re levő C állomásnál van. A B helységet egy egyenes műútszakasszal akarják összekötni az AC vonalszakasz egy M pontjával úgy, hogy az áruszállítás A-ból M-be vasúton, onnan B-be pedig műúton a lehető legolcsóbb legyen; figyelembe véve, hogy a szállítás költsége kilométerenként a vasúton csak feleannyi, mint a műúton. Az A-tól milyen távolságra kell lennie ilyen feltételek mellett az M pontnak?

4. Legyen P az $ABCD$ négyzet köré írt kisebbik AB ívének tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\frac{PA + PB}{PC + PD}$$

hányados értéke minden P pontra $(\sqrt{2} - 1)$-gyel egyenlő.

5. Adott az a élhosszúságú $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka; $ABCD$ az alapnégyzete, és az AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 élek párhuzamosak. Felveszünk az AA_1 él A_1-en túli meghosszabbításán egy P pontot és a BC él C-n túli meghosszabbításán egy Q pontot úgy, hogy a PQ szakasz a C_1D_1 élt egy R belső pontban metszi. Mekkora a PQ szakasz lehetséges legkisebb hossza?

Második forduló

1. Mely n egészekre lesz az

$$n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10$$

kifejezés értéke négyzetszám?

2. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapélének és magasságának a hossza egész szám. Mekkora a gúla térfogata, ha felszínének és térfogatának azonos a mérőszáma?

3. Igazoljuk, hogy az 1-nél kisebb a, b, c pozitív számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3.$$

4. A T területű derékszögű háromszög beírt körébe egy t területű derékszögű háromszöget írunk be.
Mekkora lehet $\dfrac{T}{t}$ legkisebb értéke?

Harmadik (döntő) forduló

1. Készítsünk egy 2000 darab valós számból álló H halmazt, amelynek egyik eleme sem nulla. Jelöljük k-val a H-ból kiválasztható olyan négyelemű részhalmazok számát, amelyekben a négy elem szorzata negatív. A H elemei közül hányat kell negatívnak választanunk ahhoz, hogy k értéke a lehető legnagyobb legyen?

2. Az ABC háromszög nem egyenlő szárú; a BC, CA, AB oldal felezőpontját jelölje rendre A_1, B_1, C_1. A háromszög oldalain a C-ből az A-ba és onnan a B-be vezető út felezőpontja legyen A_2, az A-ból a B-be és onnan a C-be vezető út felezőpontját jelölje B_2, végül a B-ből a C-be és onnan az A-ba vezető út felezőpontja legyen C_2. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

3. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ pozitív egészek; az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ és a $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ összegek egyenlők, és kisebbek nk-nál ($n > 1$, $k > 1$). Bizonyítsuk be, hogy az

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$$

egyenlőségben szereplő mindkét összegből elhagyható néhány (de nem az összes) tag úgy, hogy az egyenlőség továbbra is fennálljon.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első forduló

1. Az ABC háromszögnek van 60 fokos szöge, továbbá a félkerülete felírható

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2s_c^2}{c}$$

alakban, ahol s_c a c oldalhoz tartozó súlyvonal. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szabályos.

2. Jelöljük a_n-nel a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész számot. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \cdots + \frac{1}{a_k}$$

összeget, ahol $k = 1999 \cdot 2000$.

3. Adjuk meg az összes olyan (pozitív) prímszámot, amelynek alkalmas (pozitív egész kitevős) hatványa felírható két pozitív egész szám köbének az összegeként.

4. Tegyük fel, hogy az $ABCP$ tetraéderben a PA, PB és PC élek páronként merőlegesek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a P csúcs rajta van azon az ellipszoidon, amely az ABC háromszög körülírt körére mint főkörre emelt gömbből az ABC síkra vonatkozó $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú merőleges affinitással keletkezik. (Ezen transzformáció során a tér bármely pontja az ABC síkra merőleges irányban mozdul eI úgy, hogy a síktól mért távolsága $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szeresére változik.)

5. Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós, 1999-edfokú polinom, amelyre bármely n egész szám esetén az

$$f(n), \quad f(f(n)), \quad (f(f(f(n))), \quad \ldots$$

számok páronként relatív prímek?

Második (döntő) forduló

1. Mutassuk meg, hogy egy páratlan fokú, egész együtthatós polinomfüggvény grafikonjában csak véges sokszor fordulhat elő, hogy két (különböző) egész abszcisszájú pont távolsága egész szám.

2. Tekintsük azt a kört, amely áthalad azon a három ponton, ahol egy adott háromszög szögfelezői metszik a szemközti oldalakat. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalegyenesei ebből a körből három olyan húrt metszenek ki, amelyek közül valamelyiknek a hossza egyenlő a másik kettő hosszának az összegével. (Ha a kör a háromszög oldalegyenesét nem metszi, hanem érinti, akkor a megfelelő húrt 0 hosszúságúnak vesszük.)

3. Legyenek k és t 1-nél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok $12\ldots n$ természetes sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet felcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden permutációhoz, ha $n \geq k + t - 1$.