Első nap

1. A Γ_1 és Γ_2 körök az M és N pontokban metszik egymást.

Legyen ℓ a Γ_1 és Γ_2 köröknek az a közös érintője, amelyre teljesül, hogy M közelebb van ℓ-hez, mint N. Érintse ℓ Γ_1-et az A és Γ_2-t a B pontban. Legyen az M-en átmenő, ℓ-lel párhuzamos egyenes másik metszéspontja a Γ_1 körrel C, a Γ_2 körrel pedig D.

A CA és DB egyenesek metszéspontja legyen E; az AN és CD egyenesek metszéspontja legyen P; a BN és CD egyeneseké pedig legyen Q.

Bizonyítsuk be, hogy $EP = EQ$.

2. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

3. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. A kiinduló állásban n bolha ül egy vízszintes egyenesen, nem mind ugyanabban a pontban.

Egy λ pozitív valós számra definiáljunk egy *lépést* a következőképpen:

válasszunk ki két bolhát, amelyek az A és B pontokban ülnek, ahol A balra van B-től;

ugorjon az A-n lévő bolha az egyenesnek abba a C pontjába, ami jobbra van B-től, és amelyre $BC/AB = \lambda$ teljesül.

Határozzuk meg az összes olyan λ értéket, amelyre teljesül, hogy akárhogyan választva az M pontot az egyenesen, és akárhogyan választva az n bolha kiindulási pozícióját, létezik lépéseknek egy olyan véges sorozata, amelyek végrehajtása után az összes bolha M-től jobbra helyezkedik el.

Második nap

4. Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz – egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz – valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

5. Döntsük el, hogy létezik-e olyan n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy n pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és $2^n + 1$ osztható n-nel.

6. Legyenek AH_1, BH_2, CH_3 az ABC hegyesszögű háromszög magasságai. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a T_1, T_2, T_3 pontokban érinti. Legyenek az ℓ_1, ℓ_2, illetve ℓ_3 egyenesek a H_2H_3, H_3H_1, illetve H_1H_2 egyenesek tükörképei a T_2T_3, T_3T_1, illetve T_1T_2 egyenesekre.

Bizonyítsuk be, hogy ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az ABC háromszög beírt körén vannak.

Még néhány szó az olimpiáról

A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián további négy magyar diák is eredményesen szerepelt, mindegyikük részt vett és jó helyezést is ért el a KöMaL elmúlt tanévi pontversenyében.

Kunszenti-Kovács Dávid, a *norvég* csapat legjobbja 16 ponttal bronzérmet, *Keszegh Balázs*, a *szlovák* csapat legeredményesebb versenyzője 25 ponttal ezüstérmet szerzett. *Koch Dénes* az *osztrák* csapat tagjaként 11 ponttal bronzérmet, *Tóth Ferenc*, az *ukrán* csapatból egy feladat teljes megoldásáért dicséretet kapott.

Mindannyiuknak gratulálunk!

a Szerk.