1. Az $A = \operatorname{tg}(0\cdot 12^\circ) + \operatorname{tg}(1\cdot 12^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ)$ 16-tagú összeg első és utolsó tagja 0. Továbbá

$$\operatorname{tg}(k\cdot 12^\circ) = \operatorname{tg}(180^\circ - k\cdot 12^\circ) = -\operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ - k\cdot 12^\circ) = \operatorname{tg}\left((15-k)\cdot 12^\circ\right),$$

ahol k lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Így $A = 0$.

A B kiszámításához próbáljuk meg a $(6\sqrt{3}-10)$-et egy kéttagú kifejezés köbeként felírni. Célszerű a kéttagú kifejezést $a+\sqrt{3}$ alakban keresni: $(a+\sqrt{3})^3 = a^3 + 3a^2\cdot\sqrt{3} + 3a\cdot 3 + 3\sqrt{3}$. Ebből $(3a^2+3)\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, tehát $a^2 = 1$, továbbá $a^3 + 9a = -10$, ami $a^2 = 1$ miatt $10a = -10$, vagyis $a = -1$. Eszerint:

$B = \sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3} = \sqrt{3}-1 \approx 0,73.$

$C = \log_2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^8}{32}}}} = \log_2\sqrt[6]{\sqrt[4]{\frac{4^4\cdot a^8}{a^8\cdot 32}}} = \log_2\sqrt[24]{8} = \log_2 2^{\frac{1}{8}} = 0,125.$

Az a értékétől függetlenül megkaptuk C-t. A növekvő sorrend: A, C, B.

2. Az ABE háromszögben FG középvonal, FGD háromszögben HI középvonal, HIC háromszögben KJ középvonal, ezért $AB = 2\cdot FG = 4\cdot HI = 8\cdot KJ$, így $JK : AB = 1:8$.

3. Mivel

$$\frac{x^2-2000x+1999}{x-1} = \frac{(x-1999)(x-1)}{x-1} \qquad \text{és} \qquad \frac{x^2-1999x+1998}{x-1} = \frac{(x-1998)(x-1)}{x-1},$$

azért az $x \neq 1$ kikötéssel az egyenlet a következő alakban írható: $\sqrt{2000-x} + \sqrt{x-1999} = 1$. A négyzetgyökök miatt $2000 - x \geq 0$ és $x - 1999 \geq 0$, vagyis $1999 \leq x \leq 2000$. Ezen az intervallumon csak két egész szám van, 1999 és 2000, amelyek megoldásai az egyenletnek.

4. Ha a kör középpontja illeszkedik a parabola tengelyére, akkor csak úgy lehet három közös pontjuk, ha az egyik a parabola tengelypontja. Legyen ez a háromszög C csúcsa. A parabola egyenletét írjuk $(y-3)^2 = x-2$ alakban, ezért $C(2;3)$. A szabályos háromszögnek a tengely felett lévő pontja legyen $A(a;b)$, ez a pont illeszkedik a parabolára, ezért $a = b^2 - 6b + 11$. Az AC egyenes irányszöge 30°, így $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b-3}{b^2-6b+11-2} = \frac{1}{b-3}$, vagyis $b = 3+\sqrt{3}$, $a = 5$.

A szabályos háromszög oldalának hossza: $AC = \sqrt{(5-2)^2 + (3+\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{12}$, a magassága $m = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{12} = 3$, a köréírt kör sugara pedig $r = \frac{2}{3}\cdot m = 2$. Ezek alapján a kör középpontja: $K(4;3)$. A keresett kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$.

5. Alakítsuk át a feltételeket: $(x^2-y)(x-y) = 0$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 9$. Vagyis azokat a rácspontokat keressük, amelyek illeszkednek az $y = x^2$ egyenletű parabolára vagy az $y = x$ egyenletű egyenesre és a $K(2;1)$ középpontú, $r = 3$ sugarú, zárt körlemezen vannak.

A megfelelő pontok: $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$, $(2;2)$, $(3;3)$.

6. Legyen a bevásárlóközpont egy évvel ezelőtti bevétele egységnyi, a vásárlók száma v, akkor az egy főre jutó vásárlás $\frac{1}{v}$. Ha a vásárlók száma p százalékkal nő, akkor az idén $v\left(1+\frac{p}{100}\right)$ a vásárlók létszáma, a megnövekedett egy főre futó vásárlás pedig $\frac{1}{v}\left(1+\frac{4p}{100}\right)$. Az új, megnövekedett bevétel ezek alapján $v\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{1}{v}\left(1+\frac{4p}{100}\right) = 1,54$. A műveleteket elvégezve és rendezve $4p^2 + 500p - 5400 = 0$. Az egyenlet pozitív gyöke jöhet csak szóba, és ez $p = 10$, a vásárlók száma 10 százalékkal növekedett.

7. Írjuk fel a diszkrimináns negyedét:

$$\frac{D}{4} = b^2(a+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\cdot 2ac = a^2b^2 + 2ab^2c + b^2c^2 - 2a^3c - 2ab^2c - 2ac^3 =$$
$$= b^2\cdot(a^2+c^2) - 2ac\cdot(a^2+c^2) = (b^2-2ac)\cdot(a^2+c^2).$$

a és c különböző előjelű valós számok, azért $b^2 - 2ac > 0$, $a^2 + c^2 > 0$, így $D > 0$. Ezzel megmutattuk, hogy az egyenletnek van két különböző valós gyöke.

Ha $x = 0$, akkor a helyettesítési érték $2ac$, vagyis negatív, ha $x = 1$, akkor a helyettesítési érték $(a^2+b^2+c^2) - 2b(a+c) + 2ac$. Ezt $(a-b+c)^2$ alakban is írhatjuk, ami pozitív, mert $a + c \neq b$. Ebből látható, hogy az egyik gyök a $(0;1)$ intervallumban van. Ez biztosan a nagyobbik gyök, mert a két gyök szorzata $\frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}$, negatív, a másik gyök tehát negatív.

8. Legyen az A-nál lévő belső szög α, ekkor $AC = \cos\alpha$. Írjuk fel a területet:

$T = t_{ACE} + t_{ABG} + t_{ABC} + t_{AEG} = \frac{\cos^2\alpha}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2} + \frac{1\cdot\cos\alpha\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{2}. T = \frac{\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1}{2} = \frac{1+\cos}{2}$

Legyen $2\alpha = x$, és vizsgáljuk az $f(x) = 2\sin x + \cos x$ függvényt, keressük meg a maximumhelyét a $(0; 180^\circ)$ intervallumon:

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\left(\sin x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx$$
$$\approx \sqrt{5}(\sin x \cos 26,6^\circ + \cos x \sin 26,6^\circ) = \sqrt{5}\sin(x + 26,6^\circ).$$

Vagyis $x \approx 63,4^\circ$, így $\alpha \approx 31,7^\circ$.

Számadó László