

Április 12-én és 13-án került sor a XI. magyar–izraeli matematikaverseny egyéni részére. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia rendszerében lebonyolított verseny az idei évtől kezdve *Joe Gillis* izraeli és *Turán Pál* magyar matematikusok emlékére a **Gillis–Turán Matematikaverseny** nevet viseli. A kétnapos egyéni verseny feladatai a következők voltak:

Első nap

1. Legyen S a 2000 szám összes partícióinak halmaza. Minden S -beli p partícióra definiálunk egy függvényt: $f(p) = (a \text{ } p\text{-beli összeadandók száma}) + (a \text{ } p\text{-beli maximális összeadandó})$. Számítsuk ki azt a minimális értéket, amit $f(p)$ S -en felvesz.

Megjegyzés. Egy pozitív egész n szám partíciója alatt értjük n egy előállítását pozitív egészek összegeként. (Két partíciót, amelyek csak az összeadandók sorrendjében különböznek, nem tekintünk különbözőnek.)

2. Bizonyítsuk be, vagy cáfoljuk meg a következő állítást: minden pozitív egész k számhoz létezik olyan pozitív egész n szám, hogy az $\binom{n}{i}$ binomiális együttható osztható k -val minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén.

3. Legyen ABC egy olyan háromszög, ami nem egyenlő oldalú. Az ABC háromszög beírt köre érintse a megfelelő oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban, és legyen M az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy M rajta van az ABC háromszög körülírt körének középpontját és beírt körének középpontját összekötő egyenesen.

Második nap

1. Legyen $S = \{1, 2, \dots, 2000\}$. Tekintsünk két $A, B \subseteq S$ halmazt, amelyekre $|A| \cdot |B| \geq 3999$. Bizonyítsuk be, hogy az $(A - A) \cap (B - B)$ halmaz nem üres.

Az $X - X$ jelölés jelentése: $X - X = \{s - t \mid s, t \in X, s \neq t\}$. $|X|$ jelöli az X halmaz elemszámát.

2. d egy adott egész szám. Legyen az S halmaz a következő:

$$S = \{m^2 + dn^2 \mid m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Legyen p, q az S halmaz két eleme, és tegyük fel, hogy p prím. Tegyük fel továbbá, hogy $r = \frac{q}{p}$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor r is eleme az S halmaznak.

3. k és l adott pozitív egész számok, a_{ij} ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$) pedig $k \cdot l$ rögzített pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $q \geq p > 0$, akkor

$$\left(\sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^k a_{ij}^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^l a_{ij}^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}.$$

A haifai egyetem vendégeként a magyar csapat a következő eredményt érte el (minden feladat 7-7 pontot ért):

Csikvári Péter, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t., 30 pont;

Gyenes Zoltán, Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t., 33 pont;

Vizer Máté, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t., 30 pont;

Zábrádi Gergely, Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t., 35 pont.

Az első négy feladat – könnyebbek voltak az átlagosnál – nem tette különösebben próbára a versenyzőket. Az ötödik feladatot a magyarok közül csak Zábrádi Gergely oldotta meg, a hatodikban pedig egyedül Gyenes Zoltánnak volt értékelhető részeredménye. A remekül felkészült izraeli diákok közül ketten is megoldották a legnehezebb, hatodik feladatot, így most az egyéni eredményeket összesítve megelőzték minket; a magyar versenyzők 128, az izraeliek 133 pontot értek el. Gratulálunk, és sok sikert kívánunk nekik a nyári koreai diákolimpián!

A harmadik napon újra felelevenítettük az első évek nagysikerű csapatversenyét. Az angol nyelven megfogalmazott feladatokon együtt gondolkodtak és dolgoztak a négytagú csapatok. A feladatokat a 298. oldalon közöljük.

A csapatverseny problémáinak megoldása a magyar diákoknak sikerült valamivel jobban. Mindkét csapat megoldotta az első feladat első két kérdését, és más-más módszerrel a második feladatot. A harmadik feladatban a magyar csapat teljesítménye határozottan felülmúlta a vendéglátókéét. (A nyitott probléma megoldásával is megpróbálkoztak, de részeredményeken túl nem sokra jutottak.)

A háromnapos verseny ünnepélyes eredményhirdetésére április 16-án, vasárnap délután került sor a haifai egyetem dísztermében. Az esemény díszvendége volt *Joszeif Szarid*, az izraeli művelődési miniszter, a magyar külképviselet nevében pedig *dr. Jungbert Béla* helyettes nagykövet jött el Tel Aviból.

A jövő évi, immár 12-dik verseny színhelye a hagyományoknak megfelelően Magyarország lesz.

Pataki János