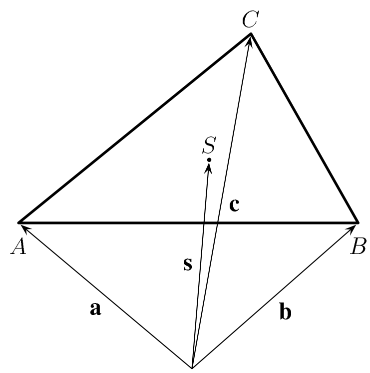
A **Gy. 3213.** gyakorlatban egy konvex ötszög területét kellett megfelezni kerületének egy kijelölt pontján átmenő egyenessel (megoldása megjelent a KöMaL 1999/3. számában). Az 1999/6. számban kitűzött **B. 3295.** feladatban az volt a kérdés, hogy a háromszög súlypontján átmenő egyenesek közül melyek felezik a háromszög területét (megoldása e szám 96. oldalán). Aki megoldotta ezeket a feladatokat, rájöhetett: A területfelező nem okvetlenül súlyvonal, a súlyvonal pedig nem mindig területfelező. A második feladatban súlyponton átmenő egyenesekről van szó, amelyek fizikai értelmezés szerint mind súlyvonalak, a matematikai fogalomalkotás szerint viszont a háromszögnek csak három súlyvonala van. A háromszögön túl – pl. egy ötszög esetén – a matematikában alig-alig esik szó súlyvonalról. Az említett két feladat jó alkalom, hogy a súlypontról beszéljünk. Ezt az is indokolja, hogy a dolgozatok javítása közben észrevehetjük: a súlyvonal és a súlypont fogalma a megoldókban kialakulatlan.

A súlypont fizikai fogalom, amelyet pl. úgy értelmezhetünk, hogy a súlypontban alátámasztott test egyensúlyban van. Másrészt a súlypont fogalmát a matematikában is használjuk (pl. egy háromszög súlypontja vagy egy pontrendszer súlypontja). A közös nevet az indokolja, hogy *bizonyos* anyageloszlások (homogén háromszöglemez vagy egyenlő tömegű pontszerű testek) esetén a matematikai értelemben vett súlypont megegyezik a fizikaival. Azonban, mint az alábbiakból kiderül, ez nincs mindig így!

1. *Pontrendszer súlypontja*

a) Egyetlen pont esetén a súlypont azonos a ponttal.

b) Az A, B pontok rendszerének súlypontja az AB szakasznak az az S pontja, amelyre $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\mathbf{0}$, tehát S az AB felezőpontja.



1. ábra

c) Az A, B, C ponthármas súlypontja az az S pont, amelyre $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\mathbf{0}$, ami az *1. ábra* jelöléseivel: $\mathbf{a}-\mathbf{s}+\mathbf{b}-\mathbf{s}+\mathbf{c}-\mathbf{s}=\mathbf{0}$, és így $\mathbf{s}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.

d) Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy az A_1, A_2, $\ldots$, A_n pontrendszer súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s}=\frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n}{n}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{a}_i$ az A_i helyvektora.

2. *Súlyozott pontrendszer súlypontja*

Ha az 1.d) esetet úgy képzeljük, hogy az A_1, A_2, $\ldots$, A_n pontokban m_1, m_2, $\ldots$, m_n (esetleg nem pozitív) súlyok vannak, akkor a rendszer S súlypontjára

$$m_1\cdot\overrightarrow{SA_1}+m_2\cdot\overrightarrow{SA_2}+\cdots+m_n\cdot\overrightarrow{SA_n}=\mathbf{0}.$$

Ezt a pontok helyvektorával kifejezve:

$$m_1(\mathbf{a}_1-\mathbf{s})+m_2(\mathbf{a}_2-\mathbf{s})+\cdots+m_n(\mathbf{a}_n-\mathbf{s})=\mathbf{0},$$

amiből

$$\mathbf{s}=\frac{m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+\ldots+m_n\mathbf{a}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}, \qquad (m_1+m_2+\cdots+m_n\neq 0). \tag{2}$$

(2)-ből látjuk, hogy a közönséges pontrendszert csupa azonos súllyal súlyozott pontrendszernek is tekinthetjük.[1]

Súlyvonalnak hívunk ezután minden olyan egyenest, amelyik a pontrendszer súlypontján áthalad.

Bizonyítás nélkül megemlítünk két egyszerű tételt:

[1] Bár pontrendszer súlypontját annak helyvektorával adtuk meg, könnyen ellenőrizhető, hogy maga a súlypont nem függ az origó megválasztásától. (A szerk.)

1. tétel. *Ha egy súlyozott pontrendszert két, közös pont nélküli halmazra bontunk, és az egyiknek a súlypontja* S_1*, a benne lévő pontok súlyainak összege* M_1*, ugyanezek az adatok a másik halmaznál* S_2 *és* M_2*, akkor a pontrendszer* S *súlypontja az* S_1S_2 *egyenesen van, és* $S_1S : SS_2 = M_2 : M_1$ *(*S_1S *és* SS_2 *irányított szakaszok).*

2. tétel. *Ha egy súlyozott pontrendszer súlyai nem negatívak, akkor a súlypont benne van a pontrendszer konvex burkában.*

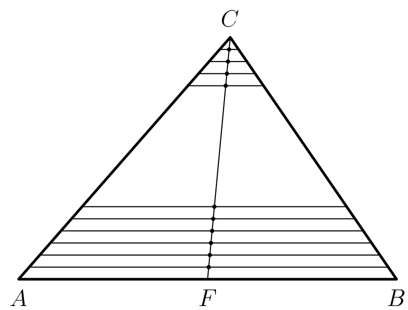
Mindkét tétel (2)-ből levezethető.

Az alábbiakban nemcsak véges pontrendszerek súlypontját vizsgáljuk. Ehhez az 1. tétel értelemszerű kiterjesztésére van szükség, pontosabban arra, hogy ha egy ponthalmazt két részhalmazra osztunk, akkor a részhalmazok súlypontján átmenő egyenes súlyvonal, tehát átmegy a súlyponton.

3. *A háromszög súlypontja*

a) A három pontból álló pontrendszer súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}.$$

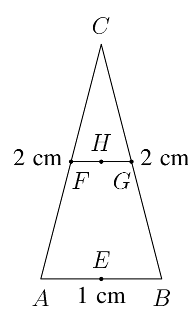


2. ábra

b) Homogén anyageloszlású háromszöglemez súlypontja

Ha egy lemeznek nincsen legalább két szimmetriatengelye, a súlypont matematikai meghatározása általában nehéz feladat, integrálszámítással történhet. A *2. ábrán* – az integrálszámítást megkerülve – azt láthatjuk, hogyan határozta meg Arkhimédész a háromszöglemez súlypontját. Ő úgy okoskodott, hogy ha a háromszöget az AB oldalával párhuzamos keskeny sávokra bontja, akkor mindegyik sáv súlypontja – a szimmetria miatt – rajta lesz a CF egyenesen (F az AB szakasz felezőpontja), ezért CF egy súlyvonal. Ugyanígy kaphatunk egy másik súlyvonalat, és a két súlyvonal metszéspontja a súlypont. Tehát a háromszöglemez súlypontja ugyanaz lesz, mint a három csúcsból álló pontrendszeré.

c) Vékony, állandó keresztmetszetű és homogén drótból készült egyenlő szárú háromszög alakú keret súlypontja



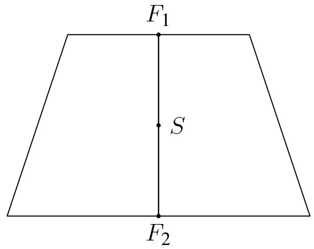
3. ábra

A *3. ábrán* 1 cm hosszú drót tömege legyen 1 g. Az ACB „törött” drótszakaszt AC és CB darabokból összetéve a súlypont az egyenlő tömegű AC, illetve BC részek F, G súlypontját (felezőpontját) összekötő szakasz H felezőpontja és összesen 4 g tömeget képvisel. Az AB szakasz 1 g tömege pedig a drótszakasz E súlypontjába (felezőpontjába) vonható össze. A keret súlypontja ezután a HE szakasz H-hoz közelebbi ötödölő pontja. Itt felhasználtuk azt a tényt, hogy egy testet két részre vágva, de a részeket helyben hagyva, a részek súlypontjait összekötő egyenes a test egy súlyvonala. Felhasználtuk továbbá, hogy (2)-ből az $n = 2$ esetben az következik, hogy két pontszerű tömeg súlypontja a pontok összekötő szakaszát a tömegekkel fordított arányban osztja.

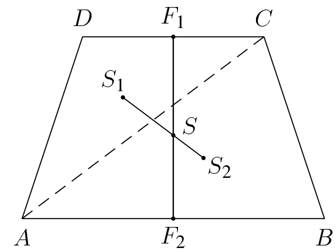
4. *A négyszög súlypontja*

a) Húrtrapézt alkotó pontnégyes súlypontja

A *4. ábrán* F_1, illetve F_2 az alapok felezőpontjai. Az S súlypont az F_1F_2 szakasz felezőpontja.



4. ábra



5. ábra

b) Húrtrapéz alakú homogén lemez súlypontja

Az *5. ábrán* F_1F_2 szimmetriatengely, tehát súlyvonal. Az ACD háromszög S_1 és az ABC háromszög S_2 súlypontját összekötve egy másik súlyvonalat kapunk. A két súlyvonal S metszéspontja a súlypont.

Az a) és b) eset azt mutatja, hogy négyszögek esetén a négy csúcs pontrendszerének súlypontja különbözhet a négyszöglemez súlypontjától.

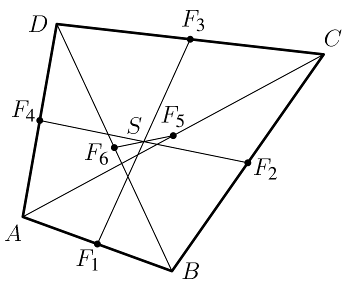
c) Tetszőleges pontnégyes súlypontja

Ha az F_i pontok ($i = 1, 2, \ldots, 6$) a *6. ábrán* látható megfelelő szakaszok felezőpontjai, akkor például F_1F_3 felezőpontjaként kaphatjuk az S súlypontot. Ha a csúcsokba mutató vektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük, akkor S-nek az $\mathbf{s}$ helyvektora.

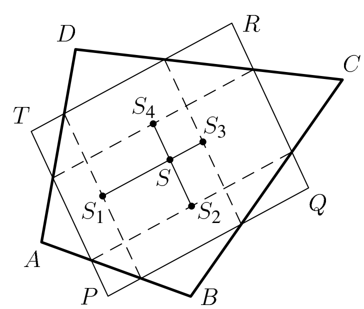
$$\mathbf{s} = \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} + \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}}{2}. \tag{3}$$

Ha a négy pont nincs egy síkban, akkor egy tetraédert határoz meg. (3)-ból következik, hogy a tetraéder szemközti éleinek felezőpontját összekötő szakaszok egy ponton mennek át, ez a pont a pontrendszer súlypontja, és felezi a szóbanforgó szakaszokat.

Bebizonyítható, hogy a homogén anyageloszlású tetraéder alakú test súlypontja megkapható az előbbi módon (*6. ábra*).



6. ábra



7. ábra

d) Homogén anyageloszlású (sík)négyszöglemez súlypontja

A *7. ábrán* az $ABCD$ minden oldalát három egyenlő részre osztottuk. Az osztópontokat az ábra szerint összekötve a $PQRT$ paralelogrammát, az úgynevezett *Wittenbauer*-paralelogrammát kapjuk. S_1 az ABD háromszög, S_3

pedig a BCD háromszög súlypontja, ezért S_1S_3 a négyszög egy súlyvonala. Hasonlóan súlyvonal S_2S_4 is, ezért S a négyszög súlypontja. Mivel S_1S_3, illetve S_2S_4 illeszkednek a Wittenbauer-paralelogramma középvonalaira, S ennek a paralelogrammának a középpontja.

5. Az elmondottak alapján *tetszőleges (súlyozott) pontrendszer, vagy homogén sokszöglemez súlypontja* megszerkeszthető. A tetraéderrel kapcsolatos tétel alapján bizonyos testek súlypontja is meghatározható.

Bogdán Zoltán