

1. Határozza meg az a és b paraméterek értékeit, ha az

$$x^3 - ax^2 + 18 = 0 \quad \text{és az} \quad x^3 + bx - 12 = 0$$

egyenleteknek két közös valós gyöke van. Oldja is meg az egyenleteket.

2. Igazolja, hogy minden háromszögben (a szokásos jelölésekkel)

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right).$$

3. Oldja meg az

$$\log_{a^2x} x^3 + \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{x} > 2$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol $a > 0$ valós paraméter.

4. Az ABC háromszög oldalainak hossza a , b , illetve c egység. ($a \geq b \geq c$), a súlyvonalak hossza rendre s_a , s_b , s_c .

a) Igazolja, hogy $2b^2 = a^2 + c^2$ pontosan akkor (akkor és csak akkor), ha $2s_b^2 = s_a^2 + s_c^2$.

b) Igazolja, hogy az ABC háromszög súlyvonaláiból mint oldalakból alkotott háromszög pontosan akkor hasonló az ABC háromszöghöz, ha $2b^2 = a^2 + c^2$.

Rábai Imre