Az összeadás és a szorzás jól ismert tulajdonságai a kommutativitás és az asszociativitás: ha a és b tetszőleges valós számok, akkor

$$a+b=b+a \qquad \text{és} \qquad a\cdot b=b\cdot a,$$

illetve

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{és} \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Tudjuk azonban, hogy a hatványozás már nem rendelkezik ezzel a két tulajdonsággal; *tetszőleges* $(a,\ b)$ számpárra (illetve $(a,\ b,\ c)$ számhármasra) általában

$$a^b\neq b^a \qquad \text{és} \qquad (a^b)^c\neq a^{(b^c)}.$$

Ám ez még nem zárja ki azt, hogy bizonyos esetekben egyenlőség álljon fenn. Cikkünkben megkeressük az összes olyan (pozitív) valós számpárt és számhármast, amelyekre a hatványozás kommutatív, illetve asszociatív, segítségükkel pedig az egész és a racionális számok körében is megvizsgáljuk a kérdést.

A kommutatív eset

Jelölésünket némileg módosítva keressük tehát az $x^y=y^x$ egyenletet kielégítő x és y pozitív valós számokat. (Azért szorítkozunk a továbbiakban csak pozitív számokra, mert negatív alap esetén a hatványozás nincs minden kitevőre definiálva a valós számkörben, valamint az az eset sem különösebben érdekes, ha x vagy y valamelyike 0-val egyenlő.) Az elinduláshoz – mint új problémák esetén oly gyakran – először próbáljunk egy-két megoldást megsejteni. Viszonylag hamar rátalálhatunk az $x=2$, $y=4$ számpárra (természetesen az egyenlet szimmetriája miatt a fordított szereposztás is megfelelő). Mivel több egész megoldás nem látszik, próbálkozzunk gyökös kifejezésekkel. Ha szerencsénk van, rájöhetünk, hogy $x=\sqrt{3}$ és $y=3\sqrt{3}$ megfelelő, ugyanis

$$\left(3\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}^3\right)^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}^{(3\sqrt{3})}.$$

Itt a hatványozás jól ismert tulajdonságán kívül azon múlott a dolog, hogy $3\sqrt{3}$ felírható, mint $\sqrt{3}^3$. Némi további gondolkodás után rátalálunk az $x=\sqrt[3]{4}$, $y=4\sqrt[3]{4}$ párra; ez is jó, hiszen

$$\left(4\sqrt[3]{4}\right)^{\sqrt[3]{4}}=\left(\sqrt[3]{4}^4\right)^{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{4}^{(4\sqrt[3]{4})}.$$

A lényeg itt is az, hogy $4\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}^4$. Mindkét (sőt, mindhárom) példában megfigyelhetjük, hogy $y=vx$ alakú, ahol $vx=x^v$. Próbáljunk meg ezen a nyomon elindulni.

Új változó bevezetése

A fenti észrevétel szerint keressük y-t $y=vx$ alakban, ahol v valós paraméter. (Úgy is fogalmazhatunk, hogy bevezetjük a $v=\dfrac{y}{x}$ új változót. Nyilván $v>0$.) Ekkor az egyenlet így írható át:

$$(vx)^x=y^x=x^y=x^{vx}=(x^v)^x.$$

Mivel itt minden érték pozitív, a két szélső kifejezést $\dfrac{1}{x}$-edik hatványra emelve adódik, hogy $vx=x^v$, tényleg ezen múlik a megoldás. Most $\dfrac{1}{x}$-szel szorozva kapjuk, hogy $v=x^{v-1}$. Ha $v\neq 1$ – azaz $x\neq y$ –, akkor $\dfrac{1}{v-1}$-edik hatványra emelve $x=v^{\frac{1}{v-1}}$-et nyerjük. y-ra pedig ezt kapjuk:

$$y=vx=v\cdot v^{\frac{1}{v-1}}=v^{\frac{1}{v-1}+1}=v^{\frac{v}{v-1}}=x^v.$$

Ha viszont $v=1$, akkor $y=x$ adódik, ami nyilván megoldás.

A továbbiakban gyakran szerepel a fenti, x-re kapott kifejezés, vezessük erre be a $h(v)$ jelölést: legyen $h(v)=v^{\frac{1}{v-1}}$. A $h(v)$ függvény értelmezési tartománya az 1-től különböző pozitív valós számok halmaza, értéke nyilván mindig pozitív.

Megkaptuk a *lehetséges* megoldásokat, hátravan még annak ellenőrzése, hogy ezek *tényleg* megoldások-e. A $v=1$ esetben, ha x tetszőleges pozitív valós szám, akkor $y=x$ nyilván megoldás; nevezzük ezeket *triviális* megoldásoknak. Ha $v\neq 1$, akkor $x=h(v)$ és $y=v\cdot h(v)$ szintén megoldások (hívjuk őket *nemtriviális* megoldásoknak), hiszen mint láttuk, $y=vx=x^v$, és így

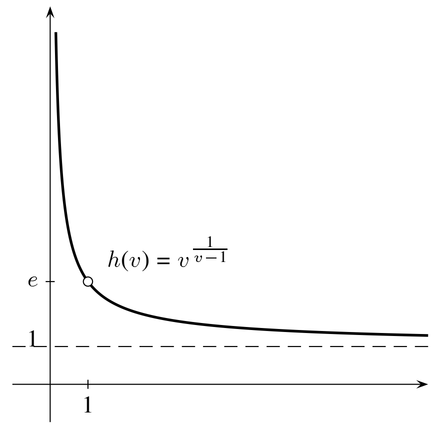
$$y^x=(x^v)^x=x^{vx}=x^y.$$

Első célunkat elértük, előállítottuk az $x^y=y^x$ egyenlőségnek eleget tevő $(x,\ y)$ pozitív valós számpárokat: $(x,\ x)$, illetve $(h(v),\ v\cdot h(v))$ alakban ($v>0$, $v\neq 1$).

A talált $h(v)$ függvény érdekes tulajdonságokkal rendelkezik. Ha $v > 0$, $v \neq 1$ továbbra is, akkor $h(v)$ az az érték, amelynél mindegy, hogy megszorozzuk-e v-vel, avagy a v-edik hatványra emeljük, eredményül ugyanazt kapjuk: $v \cdot h(v) = h(v)^v$, ahogy azt az imént láttuk. Egy másik függvényegyenlet, amelynek h eleget tesz, a következő: $v \cdot h(v) = h\left(\frac{1}{v}\right)$, illetve az osztással adódó $h(v) = \frac{1}{v} \cdot h\left(\frac{1}{v}\right)$ alak. (Gyakorlásként ellenőrizzük helyességüket.)

Ebből az is látszik, hogy a nemtriviális megoldások $\left(h(v),\ h\left(\frac{1}{v}\right)\right)$ alakba is írhatók, tehát az $(x,\ y)$ párból a $v \to \frac{1}{v}$ helyettesítéssel az $(y,\ x)$ megoldást kapjuk.

A h függvény nem értelmes, ha $v = 1$, ugyanakkor megmutatható, hogy szigorúan monoton fogyó, és $\lim_{v\to 1} h(v) = e$ (a természetes alapú logaritmus alapszáma, $e = 2,71828\ldots$)



1. ábra

Egy kis analízis

Szeretnénk az $x^y = y^x$ egyenlet fent nyert megoldásait grafikusan ábrázolni. A triviális megoldás az x; y koordinátasíkon az 1. negyed szögfelező egyenese (vagyis az $y = x$ egyenletű félegyenes, x, $y > 0$ esetén). A nemtriviális megoldás viszont nem a szokásos $y = f(x)$ alakban áll előttünk: y-t nem x függvényeként sikerült megkapnunk, hanem x is és y is a v paraméter függvénye. A talált jellemzésből ugyanakkor látszik, hogy a h értékkészletébe tartozó tetszőleges x-hez egy és csak egy tőle különböző y tartozik, amelyre $x^y = y^x$, így az $f : x \to y$ függvény mindenesetre létezik. Elvben nem is lenne akadálya, hogy a nemtriviális megoldásokat ilyen $(x,\ f(x))$ alakba írjuk. Jelölje ugyanis $h^{[-1]}$ a fent definiált h függvény inverz függvényét (h szigorú monotonitása miatt ez létezik), ekkor $x = h(v)$-ből $v = h^{[-1]}(x)$, így $(h(v),\ v \cdot h(v)) = (x,\ h^{[-1]}(x) \cdot x)$ a keresett alakú (az $f(x) = x \cdot h^{[-1]}(x)$ választással). Ez az átalakítás azonban nem ad lényeges információt a továbblépéshez, mert az $x = h(v)$ egyenletből v kifejezése, vagyis a $h^{[-1]}$ függvény meghatározása elemi módon („képlettel") – úgy tűnik – nem lehetséges.

Így a paraméteres előállításban szereplő két függvény, $h(v)$ és $v \cdot h(v)$ viselkedését vizsgáljuk tovább; ennek eredményeként az általuk (mint koordinátafüggvények által) leírt görbét – a nemtriviális megoldásokat – fel fogjuk tudni vázolni. Ezt a görbét a triviális megoldással egy koordináta-rendszerben ábrázolva kapunk teljes képet az egyenlet pozitív valós megoldásairól.

A vizsgálathoz szükség van a határérték és a derivált fogalmára (néhány nevezetes határértékkel együtt); részben emiatt, részben pedig terjedelmi okokból ezeket a bizonyításokat nem közöljük.

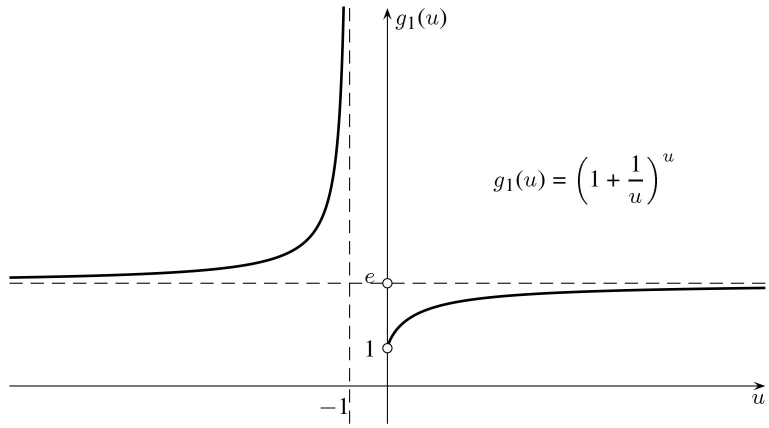
Bizonyos mértékben egyszerűsíti a továbbiakat (és egyéb összefüggésekre mutat rá), ha ismét új változót vezetünk be, „átparaméterezzük" függvényeinket. Jelölje u a $h(v)$ függvényben v kitevőjét, azaz $u = \frac{1}{v-1}$. Ebből $v = 1 + \frac{1}{u}$ adódik. Függvényeink ezzel az új változóval a

$$h(v) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u, \qquad \text{illetve a} \qquad v \cdot h(v) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

alakot öltik. Jelöljük az u változó ezen új függvényeit rendre $g_1(u)$, illetve $g_2(u)$-val. Nem nehéz látni, hogy a g_1 függvény grafikonja és a g_2 függvény grafikonja egymás tengelyes tükörképei. A tengely az $x = -\frac{1}{2}$ egyenes: a számegyenesen ugyanis egy u pont $\left(-\frac{1}{2}\right)$-re vonatkozó tükörképe $(-u-1)$, és u helyett $(-u-1)$-et helyettesítve g_1-ben a függvény éppen g_2-be megy át. Formálisan: $g_1(-u-1) = g_2(u)$, és fordítva, $g_2(-u-1) = g_1(u)$.

Elég tehát a továbbiakban pl. a g_1 függvénnyel foglalkozni, ebből g_2 tulajdonságai egyszerűen leolvashatók. Mivel v az 1-től különböző pozitív számokat futja be, könnyen ellenőrizhető, hogy a helyettesítés után u az $\mathbf{R} \setminus [-1,\ 0]$ halmazon fog végigfutni (itt a szögletes zárójel a zárt intervallumot jelöli, $\mathbf{R}$ a valós számok halmaza). Ez tehát

g_1 értelmezési tartománya. A g_1 függvény viselkedéséről a következő ismert határértékek nyújtanak felvilágosítást (értelmezési tartományának határpontjaiban vizsgálva): $\lim_{u\to\infty} g_1(u) = e$, alulról tartva.



2. ábra

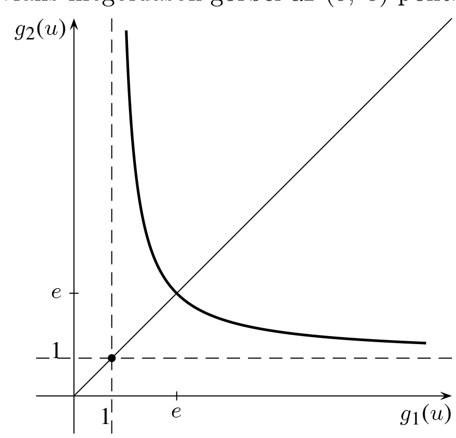
$\lim_{u\to 0+0} g_1(u) = 1$, felülről, ugyanis ez a (jobb oldali) határérték a $w = \dfrac{1}{u}$ helyettesítéssel visszavezethető $\lim_{w\to\infty} \sqrt[w]{w+1} =$ 1-re.

$\lim_{u\to -1-0} g_1(u) = +\infty$, hiszen az alap felülről 0-hoz tart, míg a kitevő (-1)-hez.

$\lim_{u\to -\infty} g_1(u) = e$, felülről tartva, a $w = -u$ helyettesítéssel látható be.

A g_1 függvény folytonos az értelmezési tartományán. Megmutatható, hogy szigorúan monoton növő a $(-\infty; -1)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumokon. A g_1 függvény grafikonját lásd a *2. ábrán*.

Minden lényeges információ a rendelkezésünkre áll a g_1 függvényről (és ezzel együtt „párjáról”, g_2-ről is). Mindezeket figyelembe véve, ábrázolhatjuk az $x^y = y^x$ egyenlet nemtriviális megoldásait a $(g_1(u), g_2(u))$ paraméteres alakból, ahol $u \in \mathbf{R} \setminus [-1,\ 0]$. (Természetesen ez ekvivalens az eredeti $(h(v),\ v\cdot h(v))$, $v > 0$, $v \neq 1$ paraméterezéssel (*3. ábra*).) Amint u $(-\infty)$-től (-1)-ig nő, a $(g_1(u),\ g_2(u))$ pontok a 3. ábrán a jobb alsó görbedarabot írják le, mert az első koordinátafüggvény e-től ∞-ig nő, míg a második koordinátafüggvény e-től 1-ig csökken, szigorúan monoton módon. Amint pedig u 0-tól $+\infty$-ig nő, a $(g_1(u),\ g_2(u))$ pontok a bal felső görbedarabot fogják kirajzolni, ugyanis az első koordináta 1-től e-ig növekszik, a második koordináta $+\infty$-ről e-re csökken, szintén szigorúan monoton módon. A 45°-os egyenes, ahogyan e rész elején láttuk, a triviális megoldásból származott. A 3. ábrán látható az összes pozitív $(x,\ y)$ számpár, amelyekre a hatványozás kommutatív. A megoldások szimmetriája azt jelenti, hogy a görbe szimmetrikus az $y = x$ egyenesre. A triviális és a nemtriviális megoldások görbéi az $(e,\ e)$ pontban találkoznak.



3. ábra

Néhány egyszerű következmény

A fentiek alapján megállapíthatjuk például, hogy a hatványozás nem lehet kommutatív, ha az alap és a kitevő mindketten 1-nél kisebb, különböző számok, hiszen a nemtriviális esetben a g_1 és g_2 függvények értékei nagyobbak 1-nél. Hasonlóan látható a grafikonról, hogy ha $x,\ y > e$ és $x \neq y$, akkor x^y szintén nem egyenlő y^x-nel.

Ha az x^y kifejezésben x és y helyére beírjuk a paraméteres előállítást, akkor a

$$h(v)^{[v\cdot h(v)]} = v^{v^{\frac{v}{v-1}} \Big/ (v-1)}$$

kifejezést kapjuk. Erről a függvényről belátható, hogy értékkészlete az $(e^e,\ \infty)$ intervallum. Ebből következik például, hogy ha egy x^y hatvány *értéke* kisebb e^e-nél és $x \neq y$, akkor $x^y \neq y^x$.

Az egész és racionális megoldások

A pozitív valós megoldások után térjünk most rá az $x^y = y^x$ egyenlet pozitív egész, illetve pozitív racionális megoldásainak megkeresésére. A triviális eset egyszerű: bármely x egész, illetve racionális szám megfelelő ($y = x$, $x > 0$). A nemtriviális eset összetettebb. Az egész megoldásokat a grafikonról is leolvashatjuk: a bal felső ág első koordinátájára $1 < x < e$, és $e < 3$ miatt ilyen egész csak $x = 2$ lehet, ehhez pedig az $y = 4$ érték tartozik. Így a bal felső ág az egész rácspontok közül csak az $(x,\ y) = (2,\ 4)$-en halad át. A szimmetria miatt a jobb alsó ág egyetlen rácspontja az $(x,\ y) = (4,\ 2)$ pont. Az összes egész megoldást megtaláltuk.

Vizsgáljuk most a racionális megoldásokat. A v paraméter olyan értékeit keressük, amelyekre a $(h(v),\ v \cdot h(v))$ pár mindkét tagja pozitív racionális szám. Ha $h(v)$ racionális, akkor $v \cdot h(v)$ csak úgy lehet racionális, ha v maga is racionális, mert $h(v)$ mindig pozitív. v-t így elég a $\dfrac{p}{q}$ alakú számok közt keresnünk, ahol p, q pozitív egészek, és föltehető, hogy relatív prímek. Figyelembe véve, hogy nemtriviális megoldást keresünk, $v \neq 1$ kell legyen, ezért $p \neq q$. Láttuk, hogy ha v helyett $\dfrac{1}{v}$-t írunk a paraméterezésben, mindössze annyi történik, hogy x és y felcserélődnek. Ezért elég a $v > 1$ esettel foglalkozni, elég tehát $p > q$-t nézni. (Azaz csak a 3. ábra bal felső ágán vizsgálódunk.) Az egész megoldásokat már megkaptuk, $q = 1$-gyel sem kell törődnünk. Emiatt $p > q > 1$ is feltehető. Beírva v helyére $\dfrac{p}{q}$-t, kapjuk, hogy

$$h(v) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}.$$

Legyen $m = p - q$, ekkor $m \geq 1$ egész. Megmutatjuk, hogy ha $m > 1$, akkor $h\left(\dfrac{p}{q}\right) = \sqrt[m]{\dfrac{p^q}{q^q}}$ nem lehet racionális. Most $(p,\ q) = 1$, ezért a $\dfrac{p^q}{q^q}$ tört sem egyszerűsíthető. Egy ilyen tört m-edik gyöke viszont csak úgy lehet racionális, ha a számlálója és a nevezője is teljes m-edik hatvány.

Legyen ugyanis $\sqrt[m]{\dfrac{r}{s}} = \dfrac{a}{b}$, ahol $(r,\ s) = 1$, $(a,\ b) = 1$ föltehető és $r,\ s,\ a,\ b > 0$. Ekkor $\dfrac{r}{s} = \dfrac{a^m}{b^m}$, másrészt $(a,\ b) = 1$-ből $(a^m,\ b^m) = 1$ következik. Mivel egy racionális szám egyszerűsített alakja egyértelmű (a számláló és a nevező pozitív), mind r, mind pedig s teljes m-edik hatvány.

Így ha most $h\left(\dfrac{p}{q}\right)$ racionális, akkor $p^q = a^m$ és $q^q = b^m$. Megmutatjuk, hogy ha q és m relatív prímek – ami most teljesül, hiszen $p = q + m$ és $(p,\ q) = 1$ –, akkor p is és q is teljes m-edik hatványok.

Valóban, ha egy tetszőleges prímszám kitevője a p prímtényezős felbontásában k, akkor p^q-ban $k \cdot q$, ami most osztható m-mel. Innen pedig $(m,\ q) = 1$ miatt $m \mid k$ következik, a p tehát valóban teljes m-edik hatvány. Ugyanígy kapjuk, hogy a q is teljes m-edik hatvány.

Az $m = p - q$ egyenlőség ezután már nem lehetséges, hiszen két különböző m-edik hatvány különbsége nagyobb, mint m. Ha ugyanis $t_1 > t_2 > 0$ egészek, akkor

$$t_1^m - t_2^m = (t_1 - t_2)\left(t_1^{m-1} + t_1^{m-2}t_2 + \cdots + t_1 t_2^{m-2} + t_2^{m-1}\right),$$

és a jobb oldal határozottan nagyobb, mint $(t_1 - t_2) \cdot m \cdot t_2^{m-1}$, ami legalább m.

Ezzel igazoltuk, hogy ha $m = p - q > 1$, akkor $h\left(\dfrac{p}{q}\right)$ irracionális.

Maradt az $m = 1$, azaz a $p = q + 1$ eset. Ekkor $h(v) = \left(\dfrac{q+1}{q}\right)^q$, nyilván racionális, $v \cdot h(v)$-re pedig $\left(\dfrac{q+1}{q}\right)^{q+1}$ adódik. q helyett a szokásosabb n változóval felírva megkaptuk a pozitív racionális megoldásokat

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{illetve} \qquad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ahol $n > 1$ egész. (Ha $n = 1$, akkor az $x = 2$, $y = 4$ megoldást kapjuk meg újra.) Természetesen x és y most is felcserélhetők. Ezek tehát a 3. ábra nemtriviális görbéjének azon pontjai, amelyeknek mindkét koordinátája racionális.

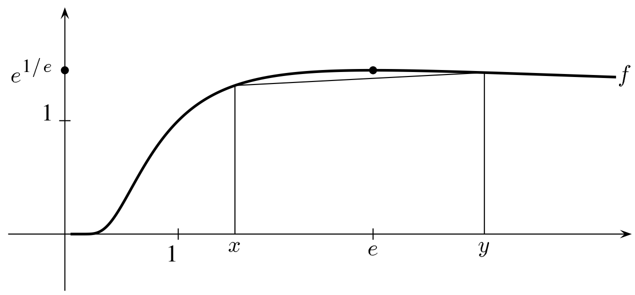
Az analízisben az $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, illetve az $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ számokból képezett sorozatok azért nevezetesek, mert mindkettőjük határértéke ($n \to \infty$ esetén) az e szám. Általában éppen így definiálják az e számot. Mi most egy másik különleges tulajdonságukat találtuk: a hatványozás a (különböző, pozitív) racionális számok körében csak ezen számok esetén kommutatív.

Egy másik megközelítés

A kommutatív eset lezárásaként megemlítünk egy másik utat, amelyen az $x^y = y^x$ egyenlet vizsgálatakor elindulhatnánk. Tulajdonképpen az egyenlet (ekvivalens módon történő) átfogalmazásáról van szó: ha mindkét oldalt $\dfrac{1}{x \cdot y}$-adik hatványra emeljük $(x,\ y > 0)$, akkor az $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$ alakhoz jutunk. Az eredetihez képest itt a két oldalon *ugyanannak* a függvénynek két (nem feltétlenül különböző helyen vett) helyettesítési értékéről van szó: az $f(t) = t^{\frac{1}{t}}$ ($t > 0$ valós szám) jelölés bevezetésével az egyenlet az $f(x) = f(y)$ (eredetivel ekvivalens) alakot ölti.

Nyilván megoldást kapunk, ha $x = y$. A kérdés az, hogy $x \neq y$ esetén állhat-e egyenlőség. Némi elemzéssel (határérték, monotonitás) az f függvényről megállapítható, hogy a $(0,\ 1]$ jobbról zárt intervallumot önmagára képezi (kölcsönösen egyértelműen), míg az $(1,\ e)$, illetve $(e,\ \infty)$ nyílt intervallumokat mind az $\left(1,\ e^{\frac{1}{e}}\right)$ intervallumra képezi. (Az $(1,\ e)$ intervallumon szigorúan monoton nő, $(e,\ \infty)$-en szigorúan monoton csökken.) Ezekből következik (a függvény folytonosságát használva), hogy az eredeti egyenletnek van nemtriviális megoldása: $1 < x < e$ esetén van olyan y, amelyre $f(x) = f(y)$ (ekkor a fentiekből $e < y < \infty$ adódik, és y egyértelmű). Persze fordítva is igaz: minden $e < x < \infty$ számhoz létezik egyetlen olyan y szám $(1 < y < e)$, amelyre $f(x) = f(y)$ (*4. ábra*). Az $x \in (0,\ 1]$, illetve $x = e$ számok esetén csak $y = x$ mellett lehet $f(x) = f(y)$.

Összefoglalva, az $x \in (0,\ 1]$ vagy $x = e$ számokhoz egyetlen y, míg az $x \in (1,\ e)$ vagy $x \in (e,\ \infty)$ számokhoz két olyan y létezik, amelyekre $x^y = y^x$. Ebben a megközelítésben, ha nem is maguk a megoldások, de legalább a megoldások *száma* könnyen kideríthető.



4. ábra

Az asszociatív eset

Feladatunk most az összes olyan pozitív valós $(x,\ y,\ z)$ számhármas megkeresése, amelyre

$$(x^y)^z = x^{(y^z)}.$$

A bal oldal nyilván x^{yz} alakban is felírható. Ha $x \neq 1$, akkor $yz = y^z$ adódik. Éppen ezzel a feltétellel találkoztunk a kommutatív eset vizsgálatakor. Ha $z = 1$, akkor minden pozitív y megoldás, egyébként $y = h(z)$.

Megkaptuk az összes pozitív valós számhármast, amelyekre a hatványozás asszociatív (lásd az *5. ábrát*):

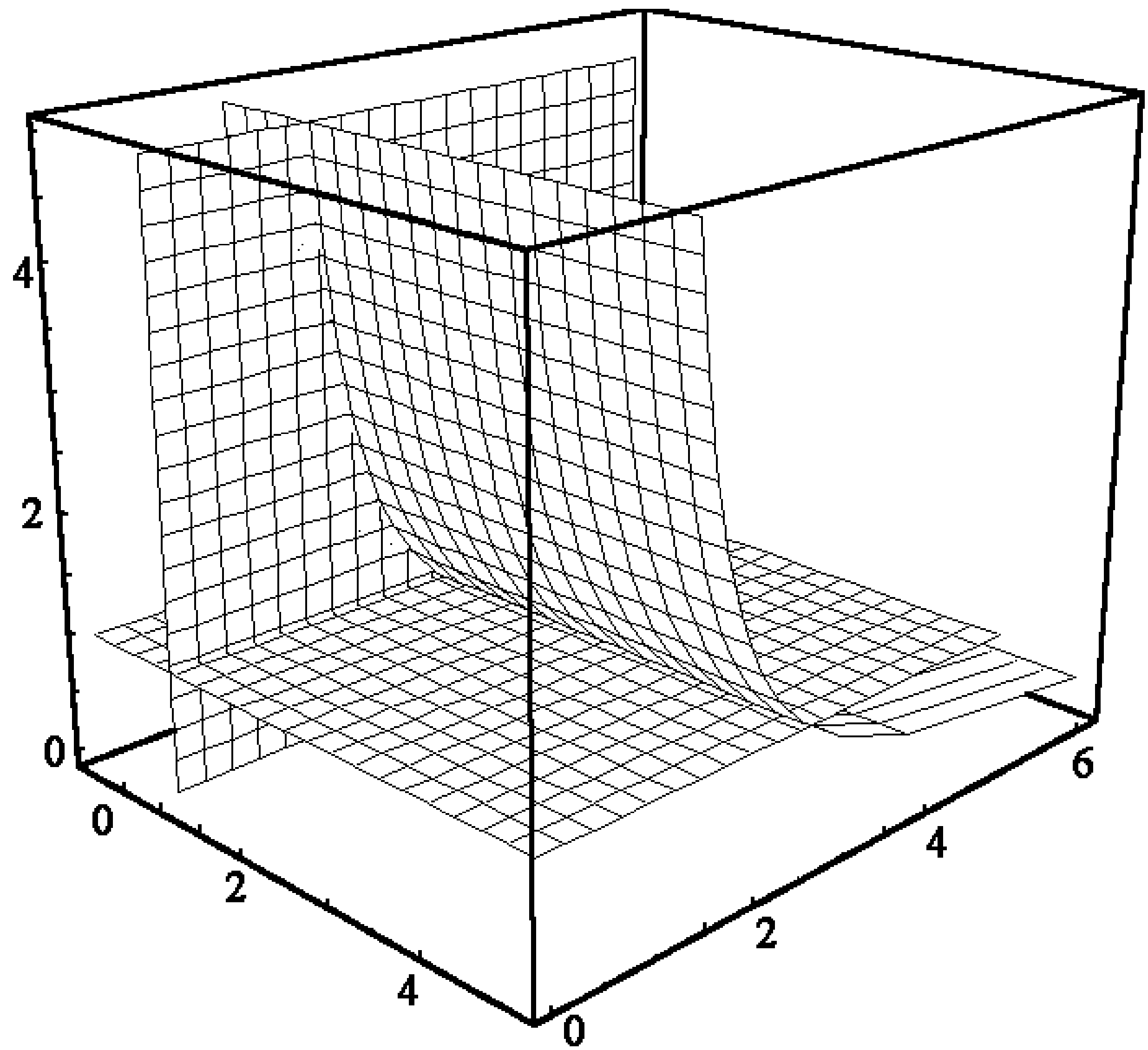
$$(1,\ y,\ z), \text{ahol} y,\ z > 0, (x,\ y,\ 1), \text{ahol} x \neq 1,\ x,\ y > 0, (x,\ h(z),\ z), \text{ahol} x \neq 1,\ z \neq 1;\ x,\ z > 0.$$

Az egész és racionális megoldások

A racionális megoldásokat – a kommutatív esetben elvégzett vizsgálatoknak köszönhetően – könnyen felírhatjuk. A valós megoldásokból kiindulva látható, hogy a pozitív, racionális számok körében a hatványozás akkor asszociatív, ha az $(x,\ y,\ z)$ hármas az alábbiak valamelyikével egyezik meg:

$$(1,\ y,\ z), \text{ahol } y, z > 0 \text{ racionális számok}, (x,\ y,\ 1), \text{ahol } x \neq 1,\, x, y > 0 \text{ racionális számok}, \left(x,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \frac{n+1}{n}\right), \text{ahol } x \text{ pozití}$$

Ezek közül az első két sor nyilvánvaló. Az utolsó két sor az $(x,\ h(z),\ z)$ alakból származik: a kommutatív esetben ugyanis éppen azt vizsgáltuk meg, hogy racionális v mellett $h(v)$ mikor racionális. (Itt v helyett most z a változó.) Ott azt kaptuk, hogy ha $v = \dfrac{p}{q}$ és $p > q > 1$ egészek, akkor $h(v)$ pontosan akkor racionális, ha $p = q + 1$. Ebből adódik a harmadik sor (q helyett n-nel felírva, a $q = 1$ esetet is megengedve). Végül, ha $v = \dfrac{p}{q}$ továbbra is, de $q > p \geq 1$, akkor a kommutatív esetben talált bizonyítás – p és q szerepének felcserélésével – ugyanúgy elvégezhető, ebből egyetlen lehetséges megoldásként $q = p + 1$ adódik. Ezt tartalmazza a negyedik sor. (A $p = q$ esettel pedig $z \neq 1$ miatt nem kell foglalkoznunk.)



5. ábra

Az egész megoldások a fentiekből származtathatók (a fenti harmadik sorban csak az $n = 1$ eset szolgáltat egész értéket, az utolsó sor esetén pedig egyáltalán nincs ilyen n):

$$(1,\ y,\ z), \text{ahol } y \text{ és } z \text{ pozitív egészek}, (x,\ y,\ 1), \text{ahol } x \neq 1,\ x \text{ és } y \text{ pozitív egészek}, (x,\ 2,\ 2), \text{ahol } x > 1 \text{ egész.}$$

Lóczi Lajos
matematikus hallgató, ELTE