

1. A háromszög kerülete $2s = 70,4$ egység, így $s = 35,2$ egység. A háromszög területe Heron képlettel számolva, $T^2 = 35,2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 26,4 \cdot 6,6$, ahonnan $T^2 = (116,16)^2$, tehát $T = 116,16$ területegység.

Ismeretes, hogy a háromszögbe írt kör sugara $\rho = \frac{T}{s}$, azaz most $\rho = \frac{116,16}{35,2} = 3,3$ egység.

(A háromszög területét és a beírható kör sugarát más módon is kiszámíthatjuk. Hogyan?)

2. Az egyenletnek minden $-2 \leq x \leq 3$ valós számra van értelme. Észrevehető, hogy

$$11 + x + 6\sqrt{x+2} = (x+2) + 6\sqrt{x+2} + 9 = (\sqrt{x+2} + 3)^2 \quad \text{és}$$

$$4 - x + 2\sqrt{3-x} = (3-x) + 2\sqrt{3-x} + 1 = (\sqrt{3-x} + 1)^2.$$

Mivel $\sqrt{x+2} + 3 > 0$ és $\sqrt{3-x} + 1 > 0$, ha $-2 \leq x \leq 3$, $\sqrt{a^2} = |a| = a$, ha $a > 0$, ezért az adott egyenlet $\sqrt{x+2} + 3 + \sqrt{3-x} + 1 = 7$, azaz

$$(1) \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3,$$

alakban írható. Az eddigi átalakítások ekvivalensek voltak, így az (1) egyenlet a megoldandó egyenlettel ekvivalens. Az (1) egyenlet sokféle módon megoldható. Oldjuk meg egyenletrendszerre való visszavezetéssel. Legyen $\sqrt{x+2} = y$ (≥ 0) és $\sqrt{3-x} = z$ (≥ 0), akkor $x+2 = y^2$ és $3-x = z^2$, ahonnan $5 = y^2 + z^2$, s mivel $y+z = 3$, $z = 3-y$, ezért $y^2 + (3-y)^2 = 5$, ahonnan $y = 1$ vagy $y = 2$.

Figyelembe véve, hogy $x = y^2 - 2$, ezért az adott egyenlet megoldásai $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

3. Célszerű jelöléssel az utolsó négy szám legyen $a-3t$, $a-t$, $a+t$, $a+3t$.

A feltétel szerint $4a = 16$, azaz $a = 4$ és $(4-3t)(4+3t) = -20$, azaz $9t^2 = 36$, $t = 2$ vagy $t = -2$. Ha $t = 2$, akkor az utolsó négy szám $-2, 2, 6, 10$, és így $q = -1$, tehát $a_2 = 2$, $a_1 = -2$;

ha $t = -2$, akkor az utolsó négy szám $10, 6, 2, -2$, és így $q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, tehát $a_2 = \frac{50}{3}$, $a_1 = \frac{250}{9}$. (Természetesen más jelöléssel is dolgozhatunk.)

4. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt az öt közrezáró két oldal arányában osztja. A két oldal aránya most $10 : 15 = 2 : 3$, ezért a harmadik oldal két része legyen $2x$, illetve $3x$. A két adott oldal által bezárt szög legyen α . A két részháromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt. Így

$$4x^2 = (6\sqrt{3})^2 + 10^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10 \cos \frac{\alpha}{2}, (1) \quad 9x^2 = (6\sqrt{3})^2 + 15^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 15 \cos \frac{\alpha}{2}. (2)$$

Az (1) egyenletet (-3) -mal, a (2) egyenletet 2-vel szorozva, majd az így kapott egyenleteket összeadva $6x^2 = 42$, $x = \sqrt{7}$ ($x > 0$), majd ezt valamelyik egyenletbe helyettesítve $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ adódik.

Így $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, $\alpha = 60^\circ$; a harmadik oldal $a = 2x + 3x = 5x = 5\sqrt{7}$ egység.

(A feladat más módokon is megoldható. Hogyan?)

5. A $P(6; 10)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete $x = 6$ vagy $y - 10 = m(x - 6)$ alakban írható, ahol $m \in \mathbf{R}$.

Az $x = 6$ egyenletű egyenes az adott egyeneseket $y_1 = \frac{8}{3}$, illetve $y_2 = -\frac{22}{3}$ ordinátájú pontokban metszi, így az y tengelyen való vetület $|y_1 - y_2| = 10$, tehát ez nem megoldás. Az $y - 10 = m(x - 6)$ egyenletű egyenes az adott két párhuzamos egyenest az

$$y_1 = \frac{8m + 40}{3m + 4}, \quad \text{illetve} \quad y_2 = \frac{40 - 22m}{3m + 4}$$

ordinátájú pontokban metszi. (Itt $3m + 4 \neq 0$ és $m \neq 0$. Ha ugyanis $3m + 4 = 0$ vagy $m = 0$, akkor nincs megoldás.)

Azokat az m értékeket keressük, amelyekre $|y_1 - y_2| = 2$, azaz

$$\left| \frac{8m + 40}{3m + 4} - \frac{40 - 22m}{3m + 4} \right| = 2,$$

ahonnan $30|m| = 2|3m + 4|$. Innen $15m = 3m + 4$ vagy $15m = -3m - 4$, azaz $m = \frac{1}{3}$ vagy $m = -\frac{2}{9}$.

A feltételeknek két egyenes felel meg:

$$y - 10 = \frac{1}{3}(x - 6) \quad (x - 3y = -24) \quad \text{vagy} \quad y - 10 = -\frac{2}{9}(x - 6) \quad (2x + 9y = 102).$$

(A feladat más módon is megoldható. Hogyan?)

6. A $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ azonosságot alkalmazva a

$$(1) \quad 2\sin^2 x + (5m - 7)\sin x + 3m^2 - 9m + 6 = 0$$

egyenletet kapjuk. Az (1) egyenletnek akkor van megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, és teljesül a $-1 \leq \sin x \leq 1$ egyenlőtlenség. Most $D = (5m - 7)^2 - 8 \cdot (3m^2 - 9m + 6) = (m + 1)^2 \geq 0$, így $\sin x = 2 - m$ vagy $\sin x = \frac{3}{2}(1 - m)$.

Az $|2 - m| \leq 1$ és a $\frac{3}{4}|1 - m| \leq 1$ egyenlőtlenség közül legalább az egyik akkor teljesül, ha $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$, így ezekre az m -ekre van az egyenletnek megoldása.

Ha $m = \frac{1}{3}$, akkor $\sin x = 1$; ha $m = 1$, akkor $\sin x = 1$ vagy $\sin x = 0$; ha $m = \frac{3}{2}$, akkor $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{3}{4}$; ha $m = \frac{5}{3}$, akkor $\sin x = \frac{1}{3}$ vagy $\sin x = -1$; ha $m = 3$, akkor $\sin x = -1$. Oldja meg ezeket az alapegyenleteket!

7. Az egyenlőtlenség $x > 0$, $x \neq 1$ valós számokra értelmezett. Azonosságok alkalmazásával, majd rendezéssel:

$$-2 \log_4 x - 8 \log_x 4 + 10 \geq 0,$$

$$\log_4 x + 4 \cdot \frac{1}{\log_4 x} - 5 \leq 0,$$

$$\frac{(\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x + 4}{\log_4 x} \leq 0,$$

$$\frac{(\log_4 x - 1)(\log_4 x - 4)}{\log_4 x} \leq 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\log_4 x < 0$ vagy $1 \leq \log_4 x \leq 4$. Az egyenlőtlenség megoldásai tehát: $0 < x < 1$ vagy $4 \leq x \leq 256$.

8. Az x^2 -re másodfokú egyenletnek csak akkor lehet négy különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív, azaz ha

$$D = (3a + 2)^2 - 4a^2 = 5a^2 + 12a + 4 = (a + 2)(5a + 2) > 0,$$

azaz $a < -2$ vagy $a > -\frac{2}{5}$. Most

$$x_{1,4}^2 = \frac{1}{2} (3a + 2 + \sqrt{D}) \quad \text{vagy} \quad x_{2,3}^2 = \frac{1}{2} (3a + 2 - \sqrt{D});$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}(3a + 2 + \sqrt{D})}, \quad x_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(3a + 2 + \sqrt{D})},$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(3a + 2 - \sqrt{D})}, \quad x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(3a + 2 - \sqrt{D})}.$$

Mivel $x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$ és $x_3 < x_4$, azért $-x_4, -x_3, x_3, x_4$ pontosan akkor egy számtani sorozat négy egymást követő eleme, ha $2x_3 = -x_3 + x_4$, azaz $3x_3 = x_4$. (Ekkor $-2x_3 = -x_4 + x_3$ is teljesül). Tehát

$$3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (3a + 2 - \sqrt{5a^2 + 12a + 4})} = \sqrt{\frac{1}{2} (3a + 2 + \sqrt{5a^2 + 12a + 4})},$$

$$\frac{9}{2} (3a + 2 - \sqrt{5a^2 + 12a + 4}) = \frac{1}{2} (3a + 2 + \sqrt{5a^2 + 12a + 4}),$$

$$8(3a + 2) = 10\sqrt{5a^2 + 12a + 4},$$

$$19a^2 - 108a - 36 = 0, \quad a = 6 \quad \text{vagy} \quad a = -\frac{6}{19}.$$

(Ha $a = 6$, akkor $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$, $x^2 = 2$ vagy $x^2 = 18$, $x_1 = -3\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = 3\sqrt{2}$, ha $a = -\frac{6}{19}$,

akkor $x^4 - \frac{20}{19}x^2 + \left(\frac{6}{19}\right)^2 = 0$, $x^2 = \frac{2}{19}$ vagy $x^2 = \frac{18}{19}$, $x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{19}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{19}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{19}$, $x_4 = \frac{3\sqrt{2}}{19}$.)

Megjegyzés. A negyedfokú egyenletben x^3 együtthatója nulla, így a gyökök összege nulla. Jelölje a négy gyököt $x_1 = b - 3t$, $x_2 = b - t$, $x_3 = b + t$, $x_4 = b + 3t$. Innen $4b = 0$, $b = 0$. A gyökök tehát $-3t, -t, t, 3t$. Az x^2 -re másodfokú egyenlet két gyöke: $x^2 = t^2$ vagy $x^2 = 9t^2$. Az egyenlet

$$(x^2 - t^2)(x^2 - 9t^2) = 0, \quad x^4 - 10t^2x^2 + 9t^4 = 0$$

alakban írható. Hasonlítsuk össze a kitűzött egyenlettel. Ebből $9t^4 = a^2$ és $10t^2 = 3a + 2$, azaz $3t^2 = a$ vagy $3t^2 = -a$, így

$$10 \cdot \frac{a}{3} = 3a + 2 \quad \text{vagy} \quad 10 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) = 3a + 2,$$

így $a = 6$ vagy $a = -\frac{6}{19}$.