Régi, sokat vizsgált diofantikus problémák voltak a következők: egymás utáni egészek szorzata, illetve binomiális együttható mikor lehet teljes hatvány? Számos részeredmény után az első kérdést 1975-ben, a másodikat 1997-ben sikerült teljesen megválaszolni. A dolgozat első részében az első probléma történetének rövid áttekintését adjuk. A második részben részletesebben foglalkozunk a binomiális együtthatókkal kapcsolatos problémával és annak megoldásával. Végül a harmadik részben a két probléma egy közös általánosításáról és annak 1998-ban nyert megoldásáról számolunk be röviden.

1. Egymásra következő egész számok szorzata

A számelmélet egyik híres kérdése volt, hogy lehet-e egymásra következő pozitív egész számok szorzata teljes hatvány. Más megfogalmazásban: mik az

$$n(n+1)\dots(n+k-1)=x^l \tag{1}$$

diofantikus egyenlet pozitív egész megoldásai a $k\geq 2$, $x\geq 2$, $l\geq 2$ feltételek mellett? A $k=2$ esetben nyilván nincs megoldás. A probléma *C. Goldbachig* nyúlik vissza, aki 1724-ben egy *D. Bernoullihoz* írt levélben megjegyezte, hogy az (1) egyenletnek $k=3$, $l=2$ esetén nincs megoldása. Valóban, ha volna ilyen megoldás, úgy a bal oldalt $(n+1)[(n+1)^2-1]$ alakba írva az következne, hogy $(n+1)^2-1$ négyzetszám, ami nem lehetséges. Hasonló okoskodás alkalmazható a $k=3$, $l>2$ esetre is.

Az 1820-as évekből származik az a sejtés, hogy az (1) egyenletnek egyáltalán nincs megoldása. A sejtéssel már a múlt században is sokan foglalkoztak. Számos speciális eredmény született azokban az esetekben, amikor k értéke „kicsi" és $l=2$ vagy $l=3$. Az érdeklődő olvasó ezek ismertetését megtalálhatja *L. E. Dickson* „History of the Theory of Numbers" című könyvének II. kötetében, a 679–680. oldalon (l. [1]).

1917-ben *S. Narumi* bebizonyította a sejtést a $k\leq 202$, $l=2$ értékekre, *Szekeres György* pedig a 30-as években megmutatta, hogy (1)-nek nincs olyan megoldása, melyre $k\leq 8$.

1939-ben *Erdős Pál* és *O. Rigge* egymástól függetlenül bebizonyították a sejtést $l=2$-re. Bizonyításuk meglehetősen komplikált, szellemes elemi okoskodásokon alapult. Egyebek között felhasználták *Sylvesternek* azt a tételét, hogy ha $n>k\geq 2$ egész számok, úgy

$$P(n(n+1)\dots(n+k-1))>k.$$

Itt $P(a)$ egy $a>1$ egész szám legnagyobb prímosztóját jelöli.

1940-ben *Erdős Pál* és *C. L. Siegel* közösen bebizonyították a sejtést minden elegendően nagy k-ra. Bizonyításukban diofantikus approximációs módszereket használtak, de magát a bizonyítást soha nem publikálták. 1955-ben *Erdős* erre a tételre egy másik, elemi bizonyítást adott. Erdős módszerét továbbfejlesztve, végül 1975-ben *Erdős* és *J. L. Selfridge* a sejtést teljes általánosságban igazolták.

1. Tétel. (Erdős P. és J. L.Selfridge [2].) *Az* (1) *egyenletnek nincs megoldása.*

Érdekes megjegyezni, hogy a komplikált és igen szellemes elemi bizonyítás jelentős mennyiségű numerikus számítást is igényelt. A témakör részletesebb tárgyalását adja *W. Narkiewicz* „Classical problems in number theory" című könyvében (l. [7]).

2. Binomiális együtthatók

Az (1) egyenlettel rokon diofantikus egyenlet

$$\binom{n+k-1}{k}=x^l, \tag{2}$$

ahol a megoldásokat a $k\geq 2$, $n\geq k+1$, $x\geq 2$, $l\geq 2$ tulajdonságú egész számok körében keressük. Itt az $n\geq k+1$ feltétel lényegében nem jelent megszorítást. Valóban, az

$$\binom{n-1+k}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}$$

összefüggést felhasználva, valamint k-t és $n-1$-et felcserélve a (2) egyenletre vonatkozó eredmények az $n\leq k$ esetre is alkalmazhatók.

A $k=l=2$ esetben az egyenlet $(n+1)n=2x^2$ alakra hozható. Ekkor vagy

$$n=u^2,\qquad n+1=2v^2$$

vagy

$$n=2v^2,\qquad n+1=u^2,$$

ahol u, v pozitív egészek. Innen az

$$u^2 - 2v^2 = \pm 1$$

Pell-egyenletekre jutunk, melyeknek végtelen sok u, v pozitív egész megoldásuk van. Így ebben az esetben (2)-nek is végtelen sok megoldása van.

A $k = 3, l = 2$ esetet páratlan n-re *A. J. J. Meyl* (1878), páros n-re *G. N. Watson* (1919) intézte el. Eredményeikből következik, hogy ebben az esetben (2) egyetlen megoldása $n = 48$, $x = 140$, azaz

$$\binom{50}{3} = 140^2.$$

Erdős egy 1939-ben megjelent dolgozatában fogalmazta meg azt a sejtést, hogy $l > 2$ esetén a (2) egyenletnek nincs megoldása. Ugyanebben a dolgozatban ezt az állítást az $l = 3$ és a $k \geq 2^l$ esetekben igazolta. Az $l = 4$, 5 eseteket *Obláth Richárdnak* sikerült elintéznie 1948-ban.

Az (1) egyenletre korábban alkalmazott elemi módszere segítségével *Erdős* 1951-ben bebizonyította, hogy $k \geq 4$ esetén a (2) egyenletnek nincs megoldása. A bizonyítás igen szép és szellemes, magyar nyelven is elérhető *Erdős Pál* és *Surányi János* „Válogatott fejezetek a számelméletből" című könyvében (l. [3]).

Az *Erdős–Surányi könyv* 1960-ban jelent meg először. Élvezetes stílusa, bizonyításainak szépsége, a könyvben felvetett sok nyitott probléma rendkívül népszerűvé tették a könyvet a számelméletet kedvelők körében. A jelen dolgozat szerzője a könyv hatására kezdett a 60-as évek elején, egyetemista korában az Erdős-sejtés még nyitott $k = 2$, 3 esetével foglalkozni. Első publikációja is ezzel kapcsolatos eredményeket tartalmazott.

Az Erdős–Surányi könyv első kiadásának valamennyi példánya hamar elfogyott a könyvesboltokban. 1996-ban jelent meg a könyv második, kibővített kiadása (l. [3]). Ennek angol nyelvű változata sajtó alatt van a Springer kiadónál.

Visszakanyarodva az Erdős-sejtéshez, 1951 után nyitott maradt a $k = 2$ és a $k = 3$ eset. Kiderült, hogy Erdős elemi módszere a $k = 2$ és 3 esetre nem alkalmazható. Érdekes megjegyezni, hogy míg az (1) egyenletben a $k = 2$ és a $k = 3$ esetek bizonyultak a legkönnyebbeknek, a (2) egyenletnél a helyzet ennek éppen az ellenkezője, a probléma 1996-ig ellenállt minden próbálkozásnak. Ám szóljunk néhány szót az előzményekről, amelyek később igen hasznosnak bizonyultak a sejtés teljes általánosságban való bizonyítása során.

Erdős és Obláth eredményei következtében elég azzal az esettel foglalkozni, amikor (2)-ben $k = 2$ vagy 3 és $l > 5$ prímszám, amit a továbbiakban k-ról és l-ről fel is tételezünk.

1963-ban sikerült bebizonyítanom, hogy ha a (2) egyenlet $k = 2$ esetén egy $l > 5$ prímre nem megoldható, úgy $k = 3$-ra és a tekintett l-re csak akkor lehet megoldható, ha

$$3^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}. \tag{3}$$

Ez a kongruencia a kis Fermat-tétel szerint (mod l^2) helyett (mod l) minden $l > 3$ prímre teljesül. Tudjuk viszont, hogy a 2^{30}-nál kisebb számok körében (3) csak az $l = 11$ és az $l = 1\,006\,003$ prímszámokra áll fenn. Így a nem túl nagy l prímek esetén a $k = 3$ esetet lényegében sikerült a $k = 2$ esetre visszavezetni.

R. Tijdeman 1976-ban az effektív *Baker-módszer* felhasználásával bebizonyította, hogy a (2) egyenletnek $k = 2$ és $k = 3$ esetén csak véges sok megoldása lehet, és ezek a megoldások elvileg meghatározhatók. Tijdeman bizonyítása egy olyan nagy felső korlátot szolgáltatott az n, x, l ismeretlenekre, hogy a korlát alatti esetleges megoldásokat még a mai modern számítógépekkel sem lehetne megkeresni. A Baker-módszer egy élesebb változatát használva *N. Terai* 1994-ben bebizonyította, hogy a (2) egyenletnek a $k = 2$ és 3 esetekben csak akkor lehet megoldása, ha $l < 4250$.

A sejtés teljes bizonyításához az egyébként igen hatékony, mély és széles körben alkalmazható Baker-módszer önmagában nem bizonyult elegendőnek. Ehhez szükség volt a

$$x^l + y^l = cz^l \tag{4}$$

általánosított Fermat-féle egyenlettel kapcsolatos néhány mély eredményre. Itt $l > 5$ prímszám, $c \geq 1$ egész szám, x, y, z pedig 0-tól különböző, relatív prím egész ismeretlenek.

Az olvasó számára bizonyára ismert, hogy Fermat híres sejtését *A. Wiles* amerikai matematikus 1995-ben bebizonyította, azaz megmutatta, hogy a (4) egyenletnek $c = 1$ esetén nincs megoldása. Wiles (részben más matematikusok közreműködésével) egy nehéz és mély módszert dolgozott ki a Fermat-sejtés bizonyítására, amiről kiderült, hogy alkalmasan továbbfejlesztve bizonyos más, 1-nél nagyobb c értékek esetén is sikerrel alkalmazható. *H. Darmon* és *L. Merel* egy 1997-ben megjelent dolgozatukban megmutatták, hogy a (4) egyenletnek $c = 2$ esetén csak triviális megoldásai vannak, amelyekre $xyz = \pm 1$ teljesül. Bár Darmon és Merel dolgozatukban nem foglalkoztak a (2) egyenletre vonatkozó Erdős-sejtéssel (talán nem is ismerték azt), eredményükből egyszerűen következik, hogy (2) a $k = 2$ esetben nem megoldható. Valóban, ha (2)-nek $k = 2$ mellett volna megoldása, úgy $n = y^l$, $n + 1 = 2z^l$ vagy $n = 2z^l$, $n + 1 = y^l$, azaz

$$y^l \pm 1 = 2z^l$$

következne alkalmas 1-nél nagyobb y, z egészekkel, ami a Darmon–Merel tétel szerint nem lehetséges.

Ezt követően sikerült az Erdős-sejtés bizonyításában az utolsó lépést megtenni, a $k = 3$ esetet is elintézni. A fentiekből kitűnik, hogy ehhez tulajdonképpen már csupán egyetlen láncszem hiányzott, az $l = 11$ eset. Ehhez segítséget

nyújtott *M. A. Bennett* és *B. M. M. de Weger* egy 1997-ben publikált eredménye, mely szerint ha a, b, l pozitív egészek, $b > a > 1$ és $3 \le l < 17$ vagy $l > 347$, akkor az

$$|ax^l - by^l| = 1$$

egyenletnek legfeljebb egy pozitív egész x, y megoldása van. A fentieket felhasználva az 1997-ben megjelent [4] dolgozatomban megmutattam, hogy a (2) egyenletnek a $k = 2$ és $k = 3$ esetben nincs megoldása, azaz igaz a következő:

2. Tétel. (Erdős P., $k \ge 4$ eset; H. Darmon és L. Merel, $k = 2$ eset; Győry K., $k = 3$ eset.) *A $k = l = 2$ esettől eltekintve a* (2) *egyenlet egyetlen megoldása* $(n,\ k,\ x,\ l) = (48,\ 3,\ 140,\ 2)$, *azaz* $\binom{50}{3} = 140^2$.

A 2. Tételt a fenti formában publikáltam a [4] dolgozatomban. Az eddigiekből világos, hogy a tétel a felsorolt matematikusok által nyert részeredmények együtteséből született.

Erdős Pál rendszeres időközönként ellátogatott hozzánk Debrecenbe. Halála előtt tervezte, hogy 1996. október elején ismét meglátogat bennünket. A $k = 2$ és $k = 3$ esetekre a bizonyítást 1996 szeptemberében, Erdős Pál halála után pár nappal találtam. Úgy ismertük Őt, hogy biztosan örült volna a sejtése teljes bizonyításának. A [4] cikket az Ő emlékének dedikáltam.

Darmon és Merel, valamint Bennett és de Weger cikkei 1996-ban még csak megjelenés alatt voltak, ám a szerzők voltak szívesek kéziratikból egy-egy példányt rendelkezésemre bocsátani. És itt jön egy érdekesség: a $k = 3$ eset bizonyításához szükség volt a fentebb ismertetett, 1963-as eredményemre. Ezt az eredményt a külföldi kollégák nem ismerték. Gondolom azért, mert annak idején azt magyarul, a Matematikai Lapokban publikáltam. Emiatt az angol nyelvű [4] dolgozatomban a $k = 3$ esetre egy részletes, teljes bizonyítást adtam, az 1963-as eredményem bizonyítását is beépítve.

A $k = 3$ eset bizonyításának főbb lépései a következők. Ha a $k = 3$ és $l > 5$ prím esetben (2) megoldható és $3 \mid n$, vagy $3 \mid n + 2$, úgy könnyen belátható, hogy $\binom{n+2}{2}$, illetve $\binom{n}{2}$ teljes l-edik hatvány, ami a Darmon–Merel tétel miatt nem lehet. Maradt a $3 \mid n + 1$ eset, amikor

$$n = 2w^l, \qquad n + 1 = 3v^l, \qquad n + 2 = 2^l u^l$$

vagy

$$n = 2^l u^l, \qquad n + 1 = 3v^l, \qquad n + 2 = 2w^l,$$

ahol $n \ge 1$ és $v > 1$, $w > 1$ egészek. Innen az

$$2\left(w^l \pm 1\right) = 3v^l \pm 1 = (2u)^l \tag{5}$$

diofantikus egyenletrendszerek adódnak.

Itt szükség volt egy *S. Lubelskitől* és a jelen szerzőtől származó tételre, mely szerint a (4) egyenletből $c > 1$ esetén (bizonyos technikai feltételek mellett) következik, hogy ha x, y, z megoldás és $3 \mid x - y$ (Lubelski, 1935) vagy $3 \mid x + y$ (Győry, 1966), akkor szükségképpen teljesül a (3) kongruencia. Ennek bizonyításához mély algebrai számelméleti eszközökre volt szükség.

Az említett eredmény felhasználásával be lehet bizonyítani, hogy az (5)-ben szereplő diofantikus egyenletrendszerek akármelyikének a megoldhatóságából következik a (3) kongruencia. Továbbá (5)-ből adódóan

$$|2w^l - 3v^l| = 1,$$

aminek $v = w = 1$ megoldása. Ezért $l < 17$ vagy $l > 347$ esetén Bennett és de Weger tétele szerint további megoldás nem létezhet, azaz az (5) egyenletrendszerek a $v > 1$, $w > 1$ feltételek mellett nem megoldhatók. A fennmaradó $17 \le l \le 347$ esetekben a (3) kongruencia nem teljesül, így készen vagyunk. Megjegyezzük, hogy itt használhattuk volna Terai eredményét is, ebben az esetben Bennett és de Weger tételét elég az $l = 11$ esetre alkalmazni.

3. Az (1) és (2) egyenletek egy közös általánosítása

Az (1) és (2) egyenletek közös általánosításaként tekintsük most a

$$n(n + 1) \dots (n + k - 1) = bx^l \tag{6}$$

egyenletet, ahol n, k, b, x, l valamennyien pozitív egész ismeretlenek és $k \ge 2$, $l \ge 2$, $P(b) \le k$, b l-edik hatványmentes. Amennyiben $b = 1$, úgy ez éppen az (1) egyenlet, míg ha b a $k!$ l-edik hatványmentes része, úgy a (2) egyenletet kapjuk. Azt a feltételt, hogy b l-edik hatványmentes, elejthetnénk. Viszont ezen feltétel mellett a (6) jobb oldalának bx^l alakban való felírása egyértelművé válik, ami később hasznosnak fog bizonyulni.

A (6) egyenlettel és annak további általánosításaival (például a dolgozat végén szereplő (7) és (8) egyenletekkel) sokan, közöttük *Erdős Pál, T. N. Shorey, R. Tijdeman, N. Saradha, Hajdú Lajos, Brindza Béla, Ruzsa Imre* és a szerző foglalkoztak.

Mint fentebb láttuk, a (6) egyenletnek a $k = b = l = 2$ esetben végtelen sok megoldása van.

Elég a (6) egyenlet azon $(n,\ k,\ b,\ x,\ l)$ megoldásaival foglalkozni, amelyekre $P(x) > k$. Valóban, adott k-ra a (6) egyenletnek csak véges sok $P(x) \le k$ tulajdonságú megoldása van, és mindezek könnyen meghatározhatók. Jelöljük ugyanis $p^{(k)}$-val a legkisebb olyan prímszámot, melyre $p^{(k)} > k$. Sylvester fentebb idézett tételének következménye, hogy $P(x) \le k$ mellett $(n,\ k,\ b,\ x,\ l)$ akkor és csak akkor megoldása (6)-nak, ha $n \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p^{(k)} - k\}$. Tehát n és így b, x, l tényleg könnyen meghatározható. Vegyük észre, hogy $n = 1$ minden k-ra megoldása (6)-nak, $k!$ mindig felírható bx^l alakban a kívánt tulajdonsággal.

Példa. Könnyen ellenőrizhető, hogy $p^{(2)} = 3$ és $p^{(3)} = 5$. Ezért $k = 2,\ 3$ esetén (6) összes, $P(x) \le k$ tulajdonságú $(n,\ k,\ b,\ x,\ l)$ megoldásai:

$$(1,\ 2,\ 2,\ 1,\ l \ge 2), \qquad (1,\ 3,\ 6,\ 1,\ l \ge 2),$$
$$(2,\ 3,\ 24,\ 1,\ l \ge 4), \qquad (2,\ 3,\ 6,\ 2,\ 2), \qquad (2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3).$$

Az Erdős–Selfridge tétel bizonyításának módszerét továbbfejlesztve *N. Saradha* egy 1997-ben megjelent dolgozatában bebizonyította, hogy $k \ge 4$ esetén a (6) egyenletnek nincs olyan megoldása, amelyre $P(x) > k$. A bizonyítás a $k = 2$ és 3 esetekre nem alkalmazható.

A Wiles-módszer egy változatával *K. A. Ribet* 1997-ben megmutatta, hogy a (4) egyenletnek nincs megoldása, amennyiben c a 2-nek 1-nél nagyobb és l-nél kisebb kitevőjű hatványa. A Darmon–Merel-tétel és a Ribet-tétel felhasználásával a szerzőnek [5] újabban sikerült Saradha eredményének megfelelőjét $k = 2$ és $k = 3$-ra is igazolnia. A következő, [5]-ben ilyen formában publikált tétel a (6) egyenlet teljes megoldását szolgáltatja a $P(x) > k$ feltétel mellett.

3. Tétel. (N. Saradha, $k \ge 4$ eset; Győry K., $k \le 3$ eset). *A* $k = b = l = 2$ *esettől eltekintve* $(n,\ k,\ b,\ x,\ l) = (48,\ 3,\ 6,\ 140,\ 2)$, *azaz* $48 \cdot 49 \cdot 50 = 6 \cdot 140^2$ *a* (6) *egyenlet egyetlen olyan megoldása, melyre* $P(x) > k$

Most megmutatjuk, hogy a 3. Tételből levezethető mind az 1. Tétel, mind pedig a 2. Tétel.

Először tekintsük az (1) egyenletet, s tegyük fel, hogy $(n,\ k,\ x,\ l)$ megoldása (1)-nek. A $k = l = 2$ eset nyilván nem lehetséges. Továbbá a 3. Tétel miatt $P(x) > k$ sem teljesülhet. Ha viszont $P(x) \le k$, úgy Sylvester tétele szerint $n \le k$, azaz $n \le \dfrac{n+k}{2}$. Továbbá Csebisev tétele következtében létezik olyan p prímszám, amelyre $\dfrac{n+k}{2} \le p \le n+k-1$. Ebből következik, hogy p-nek csupán az első hatványa lehet osztója $n(n+1)\ldots(n+k-1)$-nek, ami (1) miatt nem lehetséges. Ezzel az 1. Tételt levezettük a 3. Tételből.

Ezután tekintsük a (2) egyenlet egy $(n,\ k,\ x,\ l)$ megoldását. A (2) egyenlet

$$n(n+1)\ldots(n+k-1) = bx^l$$

alakba írható, ahol b a $k!$ legnagyobb l-edik hatványmentes osztója. Feltevés szerint $n \ge k+1$, ezért Sylvester tételét alkalmazva $P(x) > k$ adódik. Ekkor viszont a 2. Tétel már azonnal következik a 3. Tételből.

Az (1), (2) és (6) egyenletek további általánosításai a

$$n(n+d)\ldots(n+(k-1)d) = x^l \quad (7) \qquad san(n+d)\ldots(n+(k-1)d) = bx^l \quad (8)$$

egyenletek, ahol $n,\ d,\ k,\ b,\ x,\ l$ pozitív egész ismeretlenek, $k \ge 3$, $x \ge 2$, $l \ge 2$, $(n,\ d) = 1$ és $P(b) \le k$. Mint említettük, ezekkel az egyenletekkel is sokan foglalkoztak, sok érdekes eredményt publikáltak. Ezekről az eredményekről az érdeklődő olvasó áttekintést nyerhet a [7], [9], [8], [6] munkákból. Azonban ellentétben az (1), (2) és (6) egyenletekkel, amelyeknek teljes megoldását ismerjük, a (7) és (8) egyenletekkel kapcsolatban eddig csupán részeredmények születtek.

Irodalom

[1] *L. E. Dickson,* History of the Theory of Numbers, 2. kiadás, Chelsea Publ. Comp., New York, 1971.

[2] *P. Erdős* and *J. L. Selfridge,* The product of consecutive integers is never a power, Illinois J. Math. **19** (1975), 292–301.

[3] *Erdős Pál* és *Surányi János,* Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1960. Második, kibővített kiadás: Polygon, Szeged, 1996.

[4] *K. Győry,* On the diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$, Acta Arith., **80** (1997), 289–295.

[5] *K. Győry,* On the diophantine equation $n(n+1)\ldots(n+k-1) = bx^l$, Acta Arith., **83** (1998), 87–92.

[6] *K. Győry,* Power values of products of consecutive integers and binomial coefficients, in: „Number Theory and Its Applications" Kluwer Acad. Publ., megjelenés alatt.

[7] *W. Narkiewicz,* Classical Problems in Number Theory, Polish Scientific Publ., Warszawa, 1986.

[8] *T. N. Shorey* and *R. Tijdeman,* Some methods of Erdős applied to finite arithmetic progressions, The Mathematics of Paul Erdős, I, 251–267. Springer-Verlag, 1997.

[9] *R. Tijdeman,* Diophantine equations and diophantine approximations, in: „Number Theory and Applications", Kluwer Acad. Publ. 1989, 215–243.

Győry Kálmán