

1. Mindkét egyenletet rendezzük nullára, majd alakítsunk szorzattá.

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 21) = 0, (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 13) = 0.$$

Ez az egyenletrendszer ekvivalens a következő *négy* egyenletrendszerrel:

$$(I) x - y = 0, x + y = 0; (II) x - y = 0, x^2 - xy + y^2 = 13; (III) x^2 + xy + y^2 = 21, x + y = 0; (IV) x^2 + xy + y^2 = 21, x^2 - xy + y^2 = 13$$

Ezek megoldásai egyben az adott egyenletrendszer megoldásai is.

$$(I): x_1 = 0, y_1 = 0;$$

$$(II): x_2 = \sqrt{13}, y_2 = \sqrt{13}; x_3 = -\sqrt{13}, y_3 = -\sqrt{13};$$

$$(III): x_4 = \sqrt{21}, y_4 = -\sqrt{21}; x_5 = -\sqrt{21}, y_5 = \sqrt{21};$$

$$(IV): x_6 = 1, y_6 = 4; x_7 = 4, y_7 = 1; x_8 = -1, y_8 = -4; x_9 = -4, y_9 = -1.$$

2. a) Mivel

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{továbbá} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

és

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = (-2) \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

azért a feltétellel ekvivalens a következő egyenlet:

$$\left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} = 0.$$

A megoldások: $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}; \alpha = 2n\pi, \beta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$ vagy $\alpha \in \mathbf{R}, \beta = 2m\pi, m \in \mathbf{Z}$.

b) A megoldások: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

3. Az igazolást vektorok alkalmazásával végezzük. Felhasználjuk, hogy egy vektornak önmagával való skaláris szorzata megegyezik a vektor hosszának négyzetével, azaz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2$.

Legyen az $ABCD$ négyszög D csúcsa az origó, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{DB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{DC} = \mathbf{c}$. Ekkor $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}, \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Ezzel a jelöléssel az $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$.

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$. Az oldalak négyzetének összege ekkor valóban megegyezik az átlók négyzetének összegével, hiszen

$$DA^2 + AB^2 + BC^2 + CD^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{c}^2,$$

az átlók négyzetének összegének összege pedig

$$DB^2 + CA^2 = \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{c}^2.$$

Ha az oldalak négyzetének összege megegyezik az átlók négyzetének összegével, akkor

$$\mathbf{a}^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 + \mathbf{c}^2 = \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2,$$

ahonnan

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{ab} - 2\mathbf{bc} + 2\mathbf{ac} = 0, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b})^2 = 0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, tehát a négyszög valóban paralelogramma.

4. Felhasználjuk, hogy ha $A > 0, B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A = B$ esetén teljesül. Azonos átalakításokkal

$$\frac{x^2 + 4}{x + 4} = \frac{x^2 - 16 + 20}{x + 4} = x - 4 + \frac{20}{x + 4} = -8 + \left(x + 4 + \frac{20}{x + 4} \right) \geq -8 + 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} - 8,$$

hiszen $x + 4 > 0$.

A függvény legkisebb értéke $4\sqrt{5} - 8$, amit akkor vesz fel, ha $x + 4 = \frac{20}{x + 4}$ (és $x + 4 > 0$), azaz ha $x = 2\sqrt{5} - 4$.

Rábai Imre