

9. évfolyam

1. Milyen p és q prímszámokra teljesül a

$$3(p^2 - q) = q^2 - p$$

egyenlet?

Oláh György (Komárom)

2. Az ABC háromszögben $AC = BC$ és $ABC \sphericalangle = BAC \sphericalangle = 40^\circ$. A BAC szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD + DC = AB$.

Szabó Magda (Szabadka)

3. Az $ABCD$ érintőnégyyszög (A és C átellenes csúcsok) beírt körének középpontja O , sugara r . Az ABO és a CDO háromszögek köré írt körének sugara r_1 , illetve r_2 . Bizonyítsuk be, hogy r nem lehet nagyobb r_1 -nél is és r_2 -nél is.

Kántor Sándor (Debrecen)

4. A valós számok halmazában értelmezett $\circ$ műveletre (amelynél bármely $x, y \in \mathbf{R}$ esetén $x \circ y \in \mathbf{R}$) minden x, y, z valós szám esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$x \circ y = y \circ x, (x \circ y)z = (xz) \circ (yz), (x \circ y) + z = (x + z) \circ (y + z).$$

Mennyi $1999 \circ 2000$?

Kántor Sándorné (Debrecen)

5. Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy a kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal.

Benedek Ilona (Vác)

6. Adottak az $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok úgy, hogy $1 \leq x_i \leq n^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és $1 \leq i < j \leq n$ esetén $x_j - x_i \geq j + i$. Határozzuk meg az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokat.

Bencze Mihály (Brassó)

10. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1997^{1999} + 1999^{1997}$$

osztható 3996-tal.

Benedek Ilona (Vác)

2. Az $ABCD$ trapéz csúcsai egy körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. A körhöz a B , illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N . Bizonyítsuk be, hogy $MN \parallel AB$.

Neubauer Ferenc (Munkács)

3. Határozzuk meg az m valós paraméternek azokat az értékeit, amelyekre a

$$9mx(3x - 1)(3x - 2)(x - 1) = 1$$

egyenletnek négy (nem feltétlenül különböző) valós gyöke van.

Péter András (Arad)

4. Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében a P pont úgy, hogy $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 12$. Határozzuk meg az ABC háromszög területét.

Kántor Sándorné (Debrecen)

5. Legyenek $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ valós számok. Határozzuk meg az

$$x, \quad y + \frac{1}{z}, \quad z + \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \frac{1}{y}$$

számok legkisebbikének lehető legnagyobb értékét.

András Szilárd (Kolozsvár)

6. Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú szabályos sokszög oldalegyenesei?

Oláh György (Komárom)

11. évfolyam

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. Tekintsük az összes olyan $P(x; y)$ pontot, amelynek koordinátáira

$$x^2y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0$$

teljesül. Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat?

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $p(x)$ polinomot, amelyre minden valós x esetén teljesül az

$$x \cdot p(x) \cdot p(1 - x) + x^3 + 100 \geq 0$$

egyenlőtlenség.

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

4. Legyen S az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja és r a háromszög köré írt kör sugara. Bizonyítsuk be, hogy

$$AS^2 + BS^2 + CS^2 > \frac{8r^2}{3}.$$

Oláh György (Komárom)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti él pár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét éltre.

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 3$) különböző pozitív egész számok, akkor

$$\frac{1}{x_1^3} + \dots + \frac{1}{x_n^3} < \frac{11}{8} - \frac{1}{2n(n-1)}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

12. évfolyam

1. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB \sphericalangle = PBC \sphericalangle = PCA \sphericalangle$. Mivel egyenlő a PAB szög tangensének értéke, ha $AB = 13$, $BC = 14$ és $AC = 15$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

2. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden x és y értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x) \leq x, f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(x) = x$.

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3 - 23x^2 - 23y^2 + y^2x + 2x = 1849.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét.

Boros Zoltán (Debrecen)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan P pont a térben, amelyből az ABC háromszög bármely csúcát a szemközti oldalegyenes bármely pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik.

Kántor Sándor (Debrecen)

6. Legyenek $a > 0$ és $b > 0$ adott valós számok, valamint

$$f(x, y, z) = \max \left\{ ax + \frac{b}{y}, ay + \frac{b}{z}, az + \frac{b}{x} \right\} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

Igazoljuk, hogy az f függvénynek van minimuma, és határozzuk meg ezt a minimumot.

Szász Róbert és Dáné Károly (Marosvásárhely)