

A1. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 1, a kúp magassága pedig 3. A kúpba egy kockát írunk oly módon, hogy az alapkör tartalmazza a kocka egy lapját. Mekkora a kocka éle?

A2. Az egységnyi sugarú kör s íve teljes egészében az első síknegyedben fekszik. Az ív és az x -tengely közti tartomány területe A , az ív és az y -tengely közti tartomány területe pedig B . Bizonyítsuk be, hogy $A + B$ csak az s ív hosszától függ, annak helyzetétől nem.

A3. Legyen az f olyan függvény, amelynek a harmadik deriváltja folytonos. Bizonyítsuk be, hogy van olyan a szám, amelyre

$$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0.$$

A4. Legyen $A_1 = 0$ és $A_2 = 1$. Ha $n > 2$, akkor A_n -et az A_{n-1} és az A_{n-2} számok tízes számrendszerbeli alakjának a felírás szerinti összefűzésével kapjuk. Például $A_3 = A_2A_1 = 10$, $A_4 = A_3A_2 = 101$, $A_5 = A_4A_3 = 10110$ és így tovább. Az n milyen értékeire lesz A_n osztható 11-gyel?

A5. Az $\mathcal{F}$ olyan nyílt körlemezek egy véges rendszere a síkban, amelyek egyesítése lefedi a sík egy E részhalmazát. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{F}$ -nek létezik olyan páronként diszjunkt $D_1, \dots, D_n$ körlemezekből álló részrendszere, hogy

$$\bigcup_{j=1}^n 3D_j \supseteq E.$$

A fenti jelölésben, ha D az r sugarú P középpontú kör, akkor $3D$ a $3r$ sugarú P középpontú kör.

A6. Legyenek A , B és C a sík különböző, egész koordinátájú pontjai. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(|AB| + |BC|)^2 < 8 \cdot [ABC] + 1,$$

akkor A , B és C egy négyzet három csúcsa. A fentiekben $|XY|$ az XY szakasz hosszát, $[ABC]$ pedig az ABC háromszög területét jelöli.

B1. Mekkora az $\frac{(x + \frac{1}{x})^6 - (x^6 + \frac{1}{x^6}) - 2}{(x + \frac{1}{x})^3 + (x^3 + \frac{1}{x^3})}$ tört minimuma, ha $x > 0$?

B2. Adott (a, b) koordinátájú pontra, ahol $0 < b < a$ keressük meg azon háromszögek területének a minimumát, amelyek egyik csúcsa az (a, b) pont, a másik az x -tengelyen, a harmadik pedig az $y = x$ egyenesen van. Bizonyítás nélkül föltehető, hogy a szóban forgó minimum létezik.

B3. Legyen H az egységnyi sugarú félgömb, $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, C az egység sugarú kör $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$, P pedig a C -be írt szabályos ötszög. Mekkora a H azon részének a felszíne, amelyik a síkbeli P tartomány „fölött” van? A választ írjuk $A \sin \alpha + B \cos \beta$ alakban, ahol A , B , α és β valós számok.

B4. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az n és m pozitív egészekre fennálljon a

$$\sum_{i=0}^{mn-1} (-1)^{\lfloor \frac{i}{m} \rfloor + \lfloor \frac{i}{n} \rfloor} = 0$$

egyenlőség?

B5. Az N pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakja 1998 darab egyesből áll: $N = \underbrace{111 \dots 11}_{1998 \text{ jegy}}$. Mi

$\sqrt{N}$ ezredik tizedesjegye?

B6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c egész számokhoz létezik olyan pozitív egész n , amelyre $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$ nem egész.