

1. Csak olyan x szám lehet megoldás, amelyre $\sqrt{x-1}+x-3 \geq 0$, azaz $x \geq 2$. Legyen $x-3 = z$ és $\sqrt{x-1} = y$ (> 0). Ekkor $y+z \geq \sqrt{2y^2+2z^2}$, ami ekvivalens az $y^2+z^2+2yz \geq 2y^2+2z^2$ és így az $(y-z)^2 \leq 0$ egyenlőtlenséggel; tehát $y = z$, $\sqrt{x-1} = x-3$, $x-1-\sqrt{x-1}-2 = 0$, $\sqrt{x-1} = 2$ (hiszen $\sqrt{x-1} > 0$), $x = 5$. Az adott egyenlőtlenséget egyetlen szám, $x = 5$ elégíti ki.

2. Jelölje a BPC , illetve a DPA háromszögek területét t_2 , illetve t_4 , a négyszög területét T .

Mivel egyrészt $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, másrészt $T = t_1 + t_3 + 2\sqrt{t_1 t_3}$, azért $t_2 + t_4 = 2\sqrt{t_1 t_3}$.

Legyen $AP = e_1$, $PC = e_2$, $BP = f_1$, $PD = f_2$.

Az egyenlő magasságú háromszögek területének arányára vonatkozó állítás alkalmazásával:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2} \quad \text{és} \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{e_1}{e_2}, \quad \text{tehát} \quad t_1 t_3 = t_2 t_4.$$

Így $t_2 + t_4 = 2\sqrt{t_2 t_4}$, $(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_4})^2 = 0$, azaz $t_2 = t_4$.

Ha az átlók szöge φ , akkor $t_2 = \frac{1}{2}e_2 f_1 \sin \varphi$ és $t_4 = \frac{1}{2}e_1 f_2 \sin \varphi$, amiből $e_1 f_2 = e_2 f_1$, $\frac{e_1}{f_1} = \frac{e_2}{f_2}$. Az APB és a CPD háromszögek tehát hasonlóak, $\angle PAB = \angle PCD$, ezért AB párhuzamos CD -vel, azaz a négyszög valóban trapéz.

3. Szorozzuk meg $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ -vel az egyenlet mindkét oldalát, a bal oldalon alakítsunk szorzattá.

$$(2 \sin x \cos x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = 1, \quad \sin 2x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$\text{a) } \sin 2x = 1 \text{ és } \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad \text{vagy} \quad \text{b) } \sin 2x = -1 \text{ és } \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -1.$$

$$\text{a) } 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ és } x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ ilyen } x \text{ tehát nincs;}$$

$$\text{b) } 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ és } x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Az egyenlet megoldásai az $x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ számok.

4. Az igazolandó egyenlőség ekvivalens a következőkkel:

$$\cos \alpha \sin \alpha + \cos \beta \sin \beta + \cos \gamma \sin \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Így elegendő ez utóbbit igazolni.

Mivel $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$, és felhasználva, hogy $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, $2\gamma = 360^\circ - 2(\alpha + \beta)$,

$$\sin 2\gamma = -\sin 2(\alpha + \beta) = -2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta),$$

tehát

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2 \sin(\alpha + \beta) (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= 2 \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) \cdot 2 \sin \alpha \sin \beta = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Rábai Imre