A pécsi Janus Pannonius gimnázium tiszteletére, ahol az 1956–57. tanévben tanítottam. 0mm

1. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $2^x + \sqrt{2^{x+2} \cdot 5^x} = 3 \cdot 5^x$; b) $\dfrac{1}{x^2-3x+3} + \dfrac{2}{x^2-3x+4} = \dfrac{6}{x^2-3x+5}$;

c) $2\sin 2x + 2\sin x = 2\cos x + 1$.

2. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $(x+1)(|x|-1) \le -\dfrac{1}{2}$; b) $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \ge -2$;

c) $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) > 2$.

3. Tekintsük a $4x - 3y + 20 = 0$ egyenletű e egyenest és az $x_0 = -2$ abszcisszájú E pontját. A k kör sugara 10 egység, és az e egyenest az E pontban érinti.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EK}$ és $\overrightarrow{OK}$ vektorok koordinátáit, ha K a k kör középpontja, O pedig az origó.

b) Írja fel a k kör egyenletét.

4. Igazolja, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$) egyenlet két gyökének aránya pontosan akkor (akkor és csak akkor) $3 : 2$, ha $6b^2 = 25ac$.

5. Az $ABCD$ téglalapban $2 \cdot AB = 3 \cdot BC$. Az AB oldal *egyenesének* egy P pontjától a C, illetve D csúcsok távolsága $8\sqrt{2}$, illetve $4\sqrt{5}$ egység. Számítsa ki a téglalap oldalainak hosszát. Hová esik a P pont?

6. Igazolja, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha $\sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta$, ahol γ a háromszög egyik hegyesszöge.

7. Oldja meg az $x^{1+\log_a x} > a^2 x$ egyenlőtlenséget, ahol $a > 0$, $a \neq 1$ valós paraméter.

8. Határozza meg az

$$f(x,\ y) = x^4 + 4y^4 + \frac{1}{x^2y^2}$$

kifejezés legkisebb helyettesítési értékét! Mely $(x;y)$ számpárok esetén veszi fel $f(x;y)$ a legkisebb értékét?

Rábai Imre