A matematika legkülönfélébb ágaiban előfordulnak olyan tételek, amelyek valamilyen matematikai objektum létezését állítják. Az ilyen tételeket *egzisztencia-tételeknek*[1] nevezik.

Ebben a cikkben olyan eszközöket vizsgálunk meg, amelyek egzisztencia-tételek bizonyításához használhatóak, leginkább a valós analízis körében.

Először kimondunk néhány tipikus egzisztencia-tételt. Ezek részben szemléltetések, részben pedig eszközök lesznek más egzisztencia-tételek bizonyításához.

Tétel. *Létezik olyan pozitív valós szám, amelynek a négyzete* 2.

A legkisebb felső korlát tétele. *Ha a valós számokból álló H halmaz felülről korlátos és nem üres, akkor a felső korlátai között van legkisebb.*[2]

Bolzano–Weierstrass tétel. *Tetszőleges korlátos x_1, x_2, ... számsorozatnak van torlódási pontja.*[3]

Borel fedési tétele. *Ha egy $[a; b]$ zárt intervallumot lefedünk akárhány nyílt intervallummal, akkor a nyílt intervallumok közül kiválasztható véges sok, amelyek még mindig lefedik az $[a; b]$ intervallumot.*

Az algebra alaptétele. *Minden legalább elsőfokú, valós vagy komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.*

Ezekben a tételekben közös, hogy egy speciális tulajdonságú szám létezését állítják egy bizonyos halmazban. Egyedül a Borel-tétel látszik kivételnek, de ezt a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Borel fedési tételének átfogalmazása. *Ha adott akárhány nyílt intervallum, és ezek közül semelyik véges sok nem fedi le az $[a; b]$ intervallumot, akkor létezik olyan c szám az $[a; b]$ intervallumban, amelyet egyik nyílt intervallum sem tartalmaz.*

I. módszer: intervallum-felezés

Ezt a módszert nagyon szemléletesen mutatja be egy klasszikus példázat.

Feladat: Fogjunk a sivatagban oroszlánt. Ehhez rendelkezésünkre áll egy oroszlánjelző műszer, ami a sivatag bármelyik részletéről megállapítja, hogy van-e benne oroszlán.

Megoldás: Két részre osztjuk a sivatagot, és mindkét felét lemérjük a műszerrel. Ha az egész sivatagban van oroszlán, akkor legalább az egyik felében szintén van. Kiválasztjuk az egyik ilyen fél sivatagot, a másik felét eldobjuk. A fél sivatagot ismét két részre osztjuk; az egyik részt (amiben van oroszlán) megtartjuk, a másik részt ismét eldobjuk. A felezgetést akkor hagyjuk abba, amikor a megmaradt sivatag darab már elég kicsi (azaz csupán egyetlen homokszemből áll), és akkor ráborítunk egy ketrecet. Ezzel megfogtuk az oroszlánt.

A gyakorlatban az *oroszlán* az a matematikai objektum, aminek a létezését bizonyítani akarjuk, például egy speciális tulajdonságú szám. A *sivatag* az a halmaz, amelynek elemei között keressük a kérdéses objektumot, legtöbbször egy intervallum. Az intervallumot természetesen nem elég véges sokszor két részre osztani. Végtelen sok felezésre van szükség, hogy végül csak egyetlen szám maradjon.

Sajnos a „megoldásban” komoly hiányosságok vannak. Ahhoz, hogy kijelenthessük: megfogtuk az oroszlánt, a következő három kérdést kell tisztáznunk:

K1. Biztosak lehetünk-e abban, hogy egyáltalán fogtunk valamit? K2. Csak egyvalamit fogtunk? K3. Hogyan győződhetünk meg róla, hogy oroszlánt fogtunk, és nem valami mást?

Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolása nélkül a „megoldás” utolsó mondata közönséges blöff.

Tanulságképpen nézzük meg, mire jutottak volna az ókori görögök a $\sqrt{2}$-vel.

Akhilleusz és a $\sqrt{2}$

Az ókori görögök csak a racionális számokat ismerték, és tragikus felismerés volt számukra, hogy nincs olyan (racionális) szám, aminek a négyzete 2, holott a geometriában meg tudtak szerkeszteni ilyen hosszúságú szakaszt.

Képzeljük el, hogy Akhilleusz, a mesebeli görög hős megpróbálja megtalálni azt a számot, amelynek négyzete 2. Akhilleusz úgy találja, hogy az 1 túl kicsi (a négyzete kisebb, mint 2), a 2 viszont túl nagy. Ezért úgy dönt, hogy a számot az $(1; 2)$ intervallumban keresi.

Ezután kipróbálja a $\frac{3}{2}$ számot, és megállapítja, hogy ez is túl nagy, mert a négyzete $\frac{9}{4}$, ami nagyobb 2-nél. Ezért a $\frac{3}{2}$-t és a nála nagyobb számokat eldobja, és csak az $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ intervallummal foglalkozik tovább. Ezután az $\frac{5}{4}$ számot próbálja ki (túl kicsi), majd a $\frac{11}{8}$-ot (túl kicsi), és így tovább. Közben az intervallum, amelyben a $\sqrt{2}$-t keresi, egyre

[1] A latin *egzisztencia* szó jelentése: létezés

[2] A H halmaznak a K szám felső korlátja, ha H-nak nincs K-nál nagyobb eleme. Egy halmaz felülről korlátos, ha létezik felső korlátja.

[3] Egy sorozatnak a c szám torlódási pontja, ha tetszőleges pozitív ε esetén a sorozatnak végtelen sok eleme esik a $(c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ intervallumba.

fogy:

$$(1;2)\,,\quad \left(1;\frac{3}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right),\quad \left(\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right),\quad \left(\frac{11}{8};\frac{23}{16}\right),\quad \left(\frac{43}{32};\frac{23}{16}\right),\quad \dots .$$

Akhilleusznak elég sok ideje van, és az intervallum-felező lépést végtelen sokszor elvégzi. Közben kidobja az összes olyan racionális számot, aminek a négyzete nagyobb 2-nél, és azokat is, amelyeknek a négyzete kisebb 2-nél.

Ekkor kellemetlen meglepetés éri: az összes racionális számot kidobta, nem maradt egy sem.

A valós számok axiómarendszere

Akhilleusz problémáján úgy lehet segíteni, hogy a racionális számokon kívül további számokat vezetünk be. Az nyilván kevés, ha csak egy új számot (a $\sqrt{2}$-t) találunk ki, szükség van még $\sqrt{3}$-ra, $\sqrt[11]{7}$-re, az $1,01001000100001\dots$. tizedes törtre és még rengeteg más számra. Az új számokkal mit is akarnánk mást, mint számolni, tehát a jól megszokott alapműveleteket és a rendezést (a kisebb-nagyobb relációt) ki akarjuk terjeszteni az „új” számokra is.

A racionális számok kiegészítésére több konstrukció is létezik. Vannak természetesnek nevezhető konstrukciók, például mondhatjuk azt, hogy ezentúl a végtelen tizedes törteket nevezzük számoknak. Ennek a konstrukciónak az a hátránya, hogy a műveleteket – különösen a szorzást – nagyon nehéz definiálni. Vannak kevésbé természetes konstrukciók, amelyek nem annyira szemléletesek, de lényegesen könnyebb a műveleteket definiálni; ilyenek például a racionális számok Dedekind-szeletei[4] vagy a racionális számokból készített Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztályai.[5]

Magukat az új számokat „valós” (azaz létező) számoknak fogjuk hívni. Most nem az a célunk, hogy a lehetséges konstrukciókat tanulmányozzuk, vagy hogy az egyik konstrukciót előnyben részesítsük a többivel szemben. Inkább nem mondjuk meg, hogy milyen objektumokat nevezünk valós számnak, hanem csak a legfontosabb tulajdonságaikat soroljuk fel. Ezeket a tulajdonságokat hívjuk a valós számok axiómáinak.

Az axiómákat négy csoportra oszthatjuk:

I. Testaxiómák. Létezik két kétváltozós művelet, az összeadás és a szorzás, valamint két különböző kitüntetett szám, a 0 és az 1 a következő tulajdonságokkal: T1. Tetszőleges a, b valós számokra $a+b=b+a$. T2. Tetszőleges a, b, c valós számokra $(a+b)+c=a+(b+c)$. T3. Tetszőleges a valós számra $a+0=a$. T4. Tetszőleges a valós számhoz létezik olyan b valós szám, amelyre $a+b=0$. T5. Tetszőleges a, b valós számokra $a\cdot b=b\cdot a$. T6. Tetszőleges a, b, c valós számokra $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$. T7. Tetszőleges a valós számra $a\cdot 1=a$. T8. Tetszőleges 0-tól különböző a valós számhoz létezik olyan b valós szám, amelyre $a\cdot b=1$. T9. Tetszőleges a, b, c valós számokra $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$.

Általában, egy algebrai struktúrát testnek nevezünk, ha teljesülnek ezek az axiómák. Testet alkotnak például a 0, 1, 2 számok, ha az összeadást és a szorzást modulo 3 végezzük (pl. $2+2=1$), vagy például a racionális törtfüggvények.

A testaxiómákból bebizonyítható az összes jól ismert műveleti azonosság, és sok más fontos tétel, például az, hogy egy polinomból ki lehet emelni a gyöktényezőket.

II. Rendezési axiómák: Létezik egy $<$ reláció a következő tulajdonságokkal: R1. Tetszőleges a, b számokra vagy $a=b$, vagy $a<b$, vagy $b<a$. R2. Ha az a, b, c számokra $a<b$ és $b<c$, akkor $a<c$. R3. Ha az a, b, c számokra $a<b$, akkor $a+c<b+c$. R4. Ha az a, b, c számokra $a<b$ és $0<c$, akkor $a\cdot c<b\cdot c$.

Egy struktúrát *rendezett testnek* hívunk, ha teljesülnek rá a test- és rendezési axiómák.

Érdekesség, hogy nem mondtuk ki, hogy $0<1$; ezt az axiómákból be lehet bizonyítani.

Ezek után definiálhatjuk a pozitív egész számokat: 1, $1+1$, $1+1+1$ stb. A rendezési axiómák garantálják többek között azt is, hogy ezek a számok különbözőek.

III. Arkhimédészi axióma: Tetszőleges valós számnál van nagyobb pozitív egész szám.

Ez az állítás nem következik a korábbiakból. Például a racionális törtfüggvények között lehet definiálni egy $<$ relációt úgy, hogy rendezett testet alkossanak, de ne teljesüljön az Arkhimédészi axióma.

IV. Cantor-axióma: Egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatának mindig van közös pontja. Más szóval, ha adott két számsorozat: $a_1\le a_2\le\dots$ és $b_1\ge b_2\ge\dots$ úgy, hogy tetszőleges n-re $a_n\le b_n$, akkor az $[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset[a_3;b_3]\supset\dots$ intervallumoknak van közös eleme.

Az Arkhimédészi és a Cantor-axióma megadja a választ a K1 és K2 kérdésekre. Tegyük fel, hogy az $[a_0;b_0]$ intervallumból indultunk ki. Az intervallum felosztásakor a felezőpontot ne dobjuk ki; ezáltal egy zárt intervallumokból álló $[a_0;b_0]\supset[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\dots$ sorozatot kapunk, amelyben az n-edik intervallum hossza $b_n-a_n=\dfrac{b_0-a_0}{2^n}$. Ezeknek az intervallumoknak a Cantor-axióma szerint van közös eleme.

Ha az intervallumoknak legalább két közös eleme van: c és d, ahol $c<d$, akkor minden n-re $[c;d]\subset[a_n;b_n]$ teljesül. Ebből következik, hogy $d-c\le b_n-a_n=\dfrac{b_0-a_0}{2^n}$, azaz $2^n<\dfrac{b_0-a_0}{d-c}$. Ez azonban azt jelenti, hogy a $\dfrac{b_0-a_0}{d-c}$ szám minden 2-hatványnál – és ezáltal minden pozitív egésznél – nagyobb, ami ellentmond az Arkhimédészi axiómának. Tehát a K1 és a K2 kérdésekre igen a válasz.

[4] A $H\subset\mathbf{Q}$ halmazt a racionális számok Dedekind-szeletének hívjuk, ha tetszőleges $q_1<q_2$ racionális számokra $q_2\in H$ esetén $q_1\in H$. Egy ilyen szelet megfelel annak, hogy a racionális számok halmazát egy valós számnál „elvágjuk”.

[5] A q_1, q_2, $\dots$ sorozatot Cauchy-sorozatnak hívjuk, ha tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan n_0 pozitív egész, hogy tetszőleges $m,n>n_0$ esetén $|q_n-q_m|<\varepsilon$. A q_1, q_2, $\dots$ és r_1, r_2, $\dots$ Cauchy-sorozatokat ekvivalensnek nevezzük, ha $(q_n-r_n)\to 0$.

Első bizonyítás a $\sqrt{2}$ létezésére

Most már minden szükséges eszköz rendelkezésünkre áll, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt{2}$ létezését.

Akhilleuszhoz hasonlóan definiálunk egy intervallumsorozatot. Legyen $[a_0;\, b_0] = [1;\, 2]$. Ha $[a_n;\, b_n]$-et már definiáltuk, akkor vizsgáljuk meg, hogy $\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2$ nagyobb-e mint 2. Ha $\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 > 2$, akkor legyen $[a_{n+1};\, b_{n+1}] = \left[a_n;\, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$. Ellenkező esetben legyen $[a_{n+1};\, b_{n+1}] = \left[\dfrac{a_n+b_n}{2};\, b_n\right]$. Ezzel egy olyan

$$[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \dots$$

intervallum-sorozatot definiáltunk, amelyben tetszőleges n-re $a_n^2 \le 2$ és $b_n^2 \ge 2$.

Az intervallumsorozatnak létezik egyetlen közös eleme; jelöljük ezt c-vel. Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy a K3 kérdés szavaival c egy oroszlán, azaz $c^2 = 2$.

Tetszőleges n-re igaz, hogy $c^2 \le b_n^2$ és $a_n^2 \le 2$, ezért

$$c^2 - 2 \le b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) < \frac{1}{2^n} \cdot (2+2) = \frac{4}{2^n}.$$

Ha a $c^2 \ge a_n^2$ és $b_n^2 \ge 2$ egyenlőtlenségből indulunk ki, akkor pontosan ugyanezt kapjuk $(2 - c^2)$-re. A két eredmény együtt azt állítja, hogy

$$\left|c^2 - 2\right| < \frac{4}{2^n}.$$

Az Arkhimédészi axióma miatt a $\dfrac{4}{2^n}$ szám tetszőleges pozitív számnál kisebb lesz, ha n elég nagy, ezért $\left|c^2 - 2\right|$ nem lehet pozitív. $\left|c^2 - 2\right|$ tehát 0, azaz $c^2 = 2$.

A legkisebb felső korlát tétele

Ugyanezzel a módszerrel bizonyíthatjuk be a legkisebb felső korlát tételét.

Legyen L_0 egy olyan szám, amely nem felső korlátja H-nak (Ilyen létezik, mert H nem üres), és legyen K_0 egy felső korlát. A K_0-nál nagyobb számok is mind felső korlátok, ezért biztosan $L_0 < K_0$.

A legkisebb felső korlátot nyilván a $[L_0;\, K_0]$ intervallumban érdemes keresnünk. Ezt az intervallumot fogjuk felezgetni.

Ha már definiáltuk az $[L_n;\, K_n]$ intervallumot, akkor vizsgáljuk meg, hogy $\dfrac{L_n+K_n}{2}$ felső korlátja-e H-nak. Ha igen, akkor legyen $[L_{n+1};\, K_{n+1}] = \left[L_n;\, \dfrac{L_n+K_n}{2}\right]$. Ha $\dfrac{L_n+K_n}{2}$ nem felső korlát, akkor legyen $[L_{n+1};\, K_{n+1}] = \left[\dfrac{L_n+K_n}{2};\, K_n\right]$.

Az így definiált

$$[L_0;\, K_0] \supset [L_1;\, K_1] \supset [L_2;\, K_2] \supset \dots$$

intervallumsorozatban tetszőleges n-re K_n felső korlátja a H halmaznak, L_n pedig nem felső korlátja.

Az intervallumoknak létezik pontosan egy közös eleme, legyen ez M. Azt kell bebizonyítanunk, hogy M felső korlátja H-nak, és nincs M-nél kisebb felső korlát.

Legyen h a H halmaz egy tetszőleges eleme. Bármely n pozitív egészre K_n felső korlát, ezért $h \le K_n$; másrészt $M \ge L_n$. Ebből következik, hogy

$$h - M \le K_n - L_n = \frac{K_0 - L_0}{2^n}.$$

Ebből az Arkhimédészi axióma miatt következik, hogy $h - M$ nem lehet pozitív, vagyis $h \le M$. Ezzel igazoltuk, hogy M felső korlát.

Legyen K egy tetszőleges felső korlátja H-nak. Ekkor tetszőleges n esetén $M \le K_n$ a konstrukció miatt és $L_n < K$, mert a K-nál nem kisebb számok mind felső korlátok; ezért

$$M - K < K_n - L_n = \frac{K_0 - L_0}{2^n}.$$

Ebből következik, hogy $M - K$ nem lehet pozitív, azaz $M \le K$. Az M számnál tehát nincs kisebb felső korlát.

A legkisebb felső korlátot latin eredetű kifejezéssel szuprémumnak is nevezzük, a H halmaz szuprémumát (legkisebb felső korlátját) $\sup H$-val jelöljük. A tétel párja a legnagyobb alsó korlát tétele: Tetszőleges nem üres, alulról korlátos halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja. Ezt infimumnak is nevezzük, jele $\inf H$.

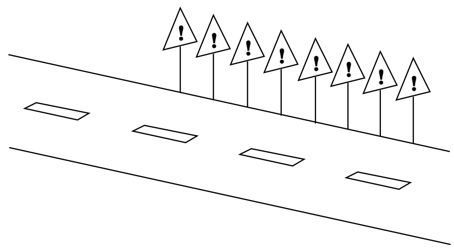
Ha a halmaznak létezik legnagyobb, illetve legkisebb eleme (maximuma, illetve minimuma), akkor ez természetesen azonos a halmaz szuprémumával, illetve infimumával. Maximuma és minimuma nincs minden halmaznak, viszont szuprémuma és infimuma minden nem üres és korlátos halmaznak van.

Érdekesség, hogy a valós számok axiómarendszerében az Arkhimédészi és a Cantor-axióma helyett a legkisebb felső korlát tételét is kimondhatjuk axiómaként. A test- és rendezési axiómákból, valamint a legkisebb felső korlát tételéből nagyon könnyű bebizonyítani a Cantor- és az Arkhimédészi axiómát.

Túl ezen, a legkisebb felső korlát tétele egy másik nagyon fontos eszköz egzisztencia-tételek bizonyítására.

II. módszer: a legkisebb felső korlát tételének alkalmazása

Egy autóút mentén a bokrok között oroszlánok bújtak el (legalább egy). Feladat: fogjunk meg legalább egy oroszlánt. Ismét rendelkezésünkre áll egy műszer, amely az autóút bármely szakaszára meg tudja mondani, hogy van-e ott oroszlán.



1. ábra

Megoldás: Minden egyes pontban állapítsuk meg, hogy az út hátralevő részén van-e oroszlán. Ha van, tegyünk ki egy „Oroszlánveszély” feliratú táblát. Ahol a táblák elfogynak, ott bújt el egy oroszlán.

Tegyük fel, hogy egy $[a;\, b]$ intervallumban keresünk egy bizonyos c számot, és az intervallum bármelyik eleméről valamilyen módszerrel meg tudjuk állapítani, hogy a keresett c-nél kisebb vagy nagyobb. A c-nél nem nagyobb számok azok a helyek, ahova „táblát teszünk”; ezeket a számokat összegyűjtjük egy T halmazban. Az a hely, ahol „a táblák elfogynak”, a T halmaz szuprémuma.

A szuprémum egyértelműen létezik, viszont ismét meg kell vizsgálnunk, hogy oroszlán-e, azaz rendelkezik-e a kívánt tulajdonságokkal.

A továbbiakban a két módszer alkalmazásaként bebizonyítjuk a bevezetőben kimondott tételeket.

Második bizonyítás a $\sqrt{2}$ létezésére

A $\sqrt{2}$-t ismét az $[1,\ 2]$ intervallumban keressük. Azok a számok nem nagyobbak $\sqrt{2}$-nél, amelyek négyzete nem nagyobb 2-nél, ezért legyen

$$T = \big\{t \in [1,\, 2]:\ t^2 \le 2\big\}$$

és $c = \sup T$. A T halmaz nem üres, mert például $1 \in T$. Ugyanakkor felülről korlátos, például a 2 egy felső korlátja. Ezért a c szám definíciója értelmes.

Azt akarjuk igazolni, hogy $c^2 = 2$.

Tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ esetén $c - \varepsilon$ nem felső korlátja T-nek, (c a legkisebb felső korlát), ezért létezik olyan $t \in T$ elem, amelyre $c - \varepsilon < t \le c$. Felhasználva, hogy $t \in T$ esetén $t^2 \le 2$,

$$c^2 - 2 \le c^2 - t^2 = (c-t)(c+t) < \varepsilon \cdot (2+2) = 4\varepsilon.$$

Hasonlóképpen, mivel c a legkisebb felső korlát, $c + \varepsilon$ nem eleme a T halmaznak, ezért $(c+\varepsilon)^2 > 2$, amiből következik, hogy

$$2 - c^2 < (c+\varepsilon)^2 - c^2 = 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < 5\varepsilon.$$

Azt kaptuk, hogy tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ esetén $\big|c^2 - 2\big| < 5\varepsilon$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $\big|c^2 - 2\big|$ nem pozitív, azaz $c^2 = 2$.

A Bolzano–Weierstrass tétel bizonyítása intervallum-felezéssel

Definiálunk egy olyan $[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots$ intervallum-sorozatot, amelyre tetszőleges n esetén $[a_n;\, b_n]$ az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza.

Legyen $[a_0;\, b_0]$ egy olyan intervallum, amely a teljes $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatot tartalmazza.

Ha az $[a_n;\, b_n]$ intervallumot már definiáltuk, és az végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatból, akkor az $\left[a_n;\, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ és $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2};\, b_n\right]$ intervallumok közül legalább az egyik szintén végtelen sok elemet tartalmaz. Az egyik ilyet válasszuk $[a_{n+1};\, b_{n+1}]$-nek.

A $[a_n;\, b_n]$ intervallumoknak létezik egy közös c eleme. Azt állítjuk, hogy ez torlódási pont. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan n szám, amelyre $[a_n;\, b_n] \subset (c-\varepsilon;\, c+\varepsilon)$. Az $[a_n;\, b_n]$ intervallum végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatból; ezeket a $(c-\varepsilon;\, c+\varepsilon)$ intervallum is tartalmazza.

A Bolzano–Weierstrass tétel bizonyítása a legkisebb felső korlát tételével

Legyen az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozat egy alsó, illetve felső korlátja A, illetve B. Legyen T azoknak a t valós számoknak a halmaza, amelyekre a $[t;\, B]$ intervallum végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatból. Ez a halmaz nem üres, például $A \in T$, és felülről korlátos, például B egy felső korlátja. Létezik tehát legkisebb felső korlátja; legyen ez c.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $c+\varepsilon$ nem eleme a T halmaznak (nagyobb c-nél, a felső korlátnál), ezért a $[c+\varepsilon;\, B]$ intervallum csak véges sok elemet tartalmaz az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatból.

A $c-\varepsilon$ szám viszont nem felső korlát (kisebb c-nél, a legkisebb felső korlátnál), ezért létezik egy olyan $t > c-\varepsilon$ szám, ami eleme T-nek. Ez azt jelenti, hogy a $[t;\, B] \subset (c-\varepsilon;\, B]$ intervallum végtelen sok elemet tartalmaz az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatból.

Összefoglalva, tetszőleges ε esetén a $(c-\varepsilon;\, B]$ intervallum végtelen sok, a $[c+\varepsilon;\, B]$ intervallum viszont csak véges sok elemet tartalmaz az $x_1,\, x_2,\, \ldots$ sorozatból; ebből következik, hogy a két intervallum különbsége, $(c-\varepsilon;\, c+\varepsilon)$ is végtelen sokat tartalmaz.

Borel fedési tételének bizonyítása intervallum-felezéssel

Tegyük fel, hogy az $[a,\, b]$ intervallumot nem lehet lefedni véges sok nyílt intervallummal. Definiálunk egy olyan $[a_0;\, b_0] \supset [a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots$ intervallum-sorozatot, amelyre tetszőleges n esetén az $[a_n;\, b_n]$ intervallum nem fedhető le véges sok nyílt intervallummal.

Legyen $[a_0;\, b_0] = [a;\, b]$. Ha már definiáltuk $[a_n;\, b_n]$-et és ez nem fedhető le véges sok nyílt intervallummal, akkor az $\left[a_n;\, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ és $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2};\, b_n\right]$ intervallumok közül legalább az egyiket szintén nem lehet véges sok nyílt intervallummal lefedni. Az egyik ilyet válasszuk $[a_{n+1};\, b_{n+1}]$-nek.

A $[a_n;\, b_n]$ intervallumoknak létezik egy közös c eleme. Tegyük fel, hogy c eleme egy I nyílt intervallumnak. Ekkor elég nagy n esetén $[a_n;\, b_n] \subset I$. Ez viszont ellentmondás, mert I egymagában lefedi az $[a_n;\, b_n]$ intervallumot. A c számot tehát egyik nyílt intervallum sem tartalmazza.

Borel fedési tételének bizonyítása a legkisebb felső korlát tételével

Tegyük fel ismét, hogy az $[a,\, b]$ intervallumot nem lehet lefedni véges sok nyílt intervallummal. Legyen T azoknak a $[a;\, b]$-beli t számoknak a halmaza, amelyekre a $[t;\, b]$ intervallum nem fedhető le véges sok nyílt intervallummal. A T halmaz nem üres, például $a \in T$, másrészt felülről korlátos. Legyen $c = \sup T$.

Ha c-t egyik nyílt intervallum sem tartalmazza, kész vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy c-t tartalmazza egy (u, v) nyílt intervallum. Ekkor $c < v$ miatt v nem eleme T-nek, és a $[c;\, b]$ intervallum lefedhető véges sok nyílt intervallummal. Ezek $(u,\, v)$-vel együtt az $(u;\, b]$ intervallumot is lefedik. Tehát tetszőleges $t > u$ esetén a $[t;\, b]$ intervallum lefedhető véges sok nyílt intervallummal. Ebből következik, hogy u is felső korlátja T-nek, ami ellentmond annak, hogy c a legkisebb felső korlát.

Az algebra alaptétele

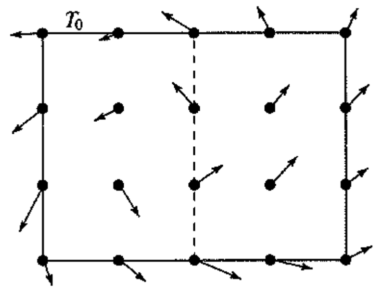
Az algebra alaptételét csak vázlatosan bizonyítjuk. A korrekt bizonyításhoz szükség lenne több fogalom pontos definiálására, amelyek a bizonyítást sokkal hosszabbra nyújtanák.

Tekintsük a

$$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

polinomot, ahol $k \geq 1$ és $a_k \neq 0$, és tegyük fel indirekte, hogy nincs gyöke a komplex számok körében.

A polinomot mint a komplex számokon értelmezett komplex értékű függvényt ábrázoljuk úgy, hogy a komplex számsík minden pontjába rajzoljuk be a polinom itteni helyettesítési értékét. Így minden egyes pontba egy vektort rajzoltunk.



2. ábra

A komplex síkon egy függvénynek tetszőleges téglalapon definiálhatjuk a *körülfordulási számát*. Ez azt mondja meg, hogy a téglalap kerületén pozitív irányban körbehaladva a függvényértékek összesen hányszor fordulnak körbe. A körülfordulási számot „előjelesen” számítjuk. Ha például a függvényértékek előbb 60°-ot fordulnak pozitív irányba, majd 420°-ot negatív irányba, akkor összesen 360°-ot fordulnak negatív irányba, és a körülfordulási szám -1.

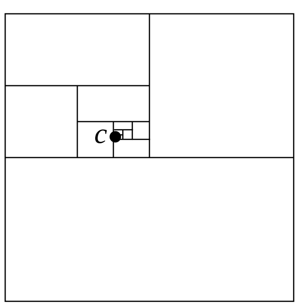
Tekintsünk egy T_0 téglalapot, amely a belsejében tartalmazza a 0-t. Ha az $a_k z^k$ függvényt ábrázoljuk, akkor a komplex hatványozás tulajdonságai miatt a körüljárási szám pontosan k.

Válasszuk a téglalapot olyan nagyra, hogy kerületén az $a_k z^k$ tag sokkal nagyobb legyen, mint az összes többi tag együttvéve. Ekkor a téglalap kerületén a függvényértékek iránya majdnem ugyanaz lesz, mint az $a_k z^k$ iránya, és a körüljárási szám nem változik.

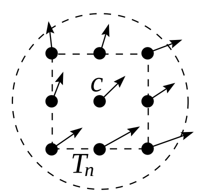
Felezzük el a téglalapot valamelyik oldalával párhuzamosan. Ha körbesétálunk a két fél téglalap kerületén, akkor az egész téglalap kerületének minden szakaszán pontosan egyszer haladunk végig, a két fél téglalap közötti szakaszon pedig mindkét irányban pontosan egyszer. Emiatt a két fél téglalapon a körüljárási számok összege megegyezik a teljes téglalap körüljárási számával.

Most definiáljuk a $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ téglalapokat úgy, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén p körüljárási száma a T_n téglalapon pozitív legyen. A T_0 téglalapot már definiáltuk. Ha T_n-et már előállítottuk, akkor felezzük el a hosszabbik oldalára merőlegesen. Ezzel két fél téglalapra bontottuk. A két fél téglalapon a körüljárási számok összege megegyezik T_n körüljárási számával, ami pozitív. Ebből következik, hogy legalább az egyik fél téglalap körüljárási száma pozitív. Az egyik ilyen fél téglalapot válasszuk T_{n+1}-nek.

Nem nehéz meggondolni, hogy a téglalapoknak egyetlen közös pontja van. Legyen ez c. Azt állítjuk, hogy c gyöke a polinomnak.

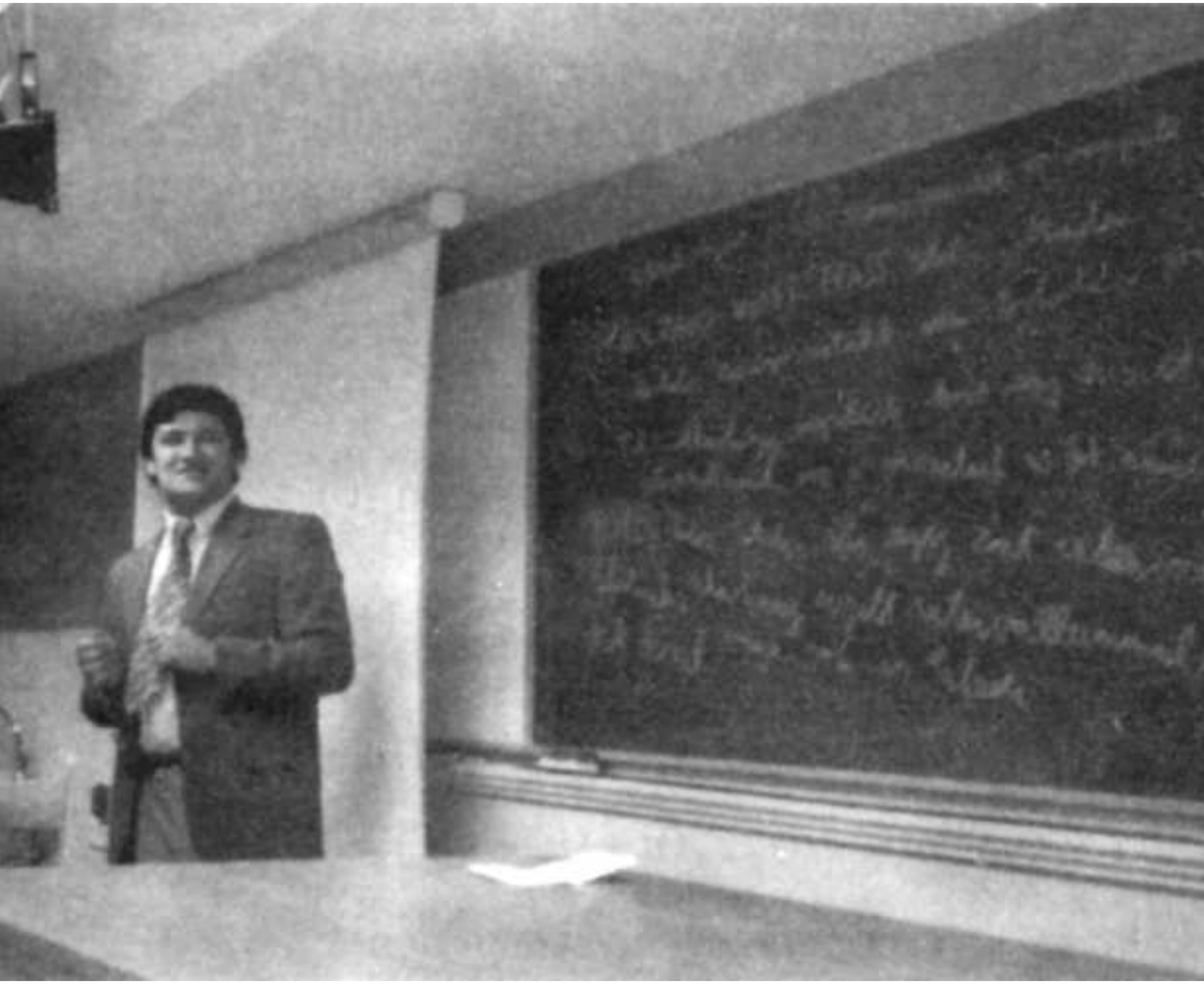


3. ábra



4. ábra

Tegyük fel, hogy c nem gyök, azaz $p(c) \neq 0$. Mivel a polinom folytonos, rajzolhatunk c körül egy elég kis kört úgy, hogy annak belsejében a polinom értékének iránya $p(c)$ irányától legfeljebb 90°-kal térjen el. Ez a kör tartalmazza a T_n téglalapot, ha n elég nagy. Ez viszont ellentmondás, mert a körüljárási szám T_n-en pozitív, ugyanakkor a kör belsejében a függvényértékek egy félsíkba esnek, egyszer sem tudnak tehát körbefordulni.



„Oroszlánfogás” a Téli Ankéton

Feladatok

1. Bizonyítsuk be mindkét módszerrel Bolzano tételét: Ha f az $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, akkor létezik olyan $c \in (a; b)$ szám, amelyre $f(c) = 0$.

2. Bizonyítsuk be mindkét módszerrel Weierstrass tételét: Tetszőleges, az $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos f függvénynek létezik maximuma és minimuma. (Segítség: Keressünk olyan c számot, amelyre $f(c)$ az f értékkészletének szuprémuma, illetve infimuma.)

3. Keressünk a valós számok axiómái között olyat, amelyik következik a többiből.

4. Igaz marad-e a Cantor-axióma, ha zárt intervallumok helyett nyílt intervallumokkal mondjuk ki?

5. Miért nincs legkisebb felső korlátja az üres halmaznak?

6. Bizonyítsuk be a test- és rendezési axiómákból valamint a legkisebb felső korlát tételéből az Arkhimédészi és a Cantor-axiómát.

7. Mutassunk példát olyan rendezett testre, amelyben teljesül a Cantor-axióma, de nem teljesül az Arkhimédészi axióma.

8. Adjunk meg olyan rendezést a racionális törtfüggvények testén, hogy rendezett testet alkossanak és ne teljesüljön az Arkhimédészi axióma.

9. Egy p polinomnak nincs gyöke a T téglalap kerületén, ahol a körüljárási száma n. Bizonyítsuk be, hogy a polinomnak, az esetleges többszörös gyököket multiplicitással számolva, pontosan n gyöke van a téglalap belsejében.

Kós Géza