

A számsíkon az egész koordinátájú pontokat *rácspontoknak* nevezzük. Megpróbáljuk megmondani, hány rácspont van az origó középpontú, r sugarú körben. Ezt a számot a továbbiakban $N(r)$ fogja jelölni.

Mivel általában egységnyi területre esik egy rácspont, azt várjuk, hogy $N(r)$ körülbelül akkora lesz, mint a kör területe, vagyis πr^2 . Ez a gondolat az alábbi módon önthető egzakt formába. Minden egyes rácspont köré írjunk a tengelyekkel párhuzamos oldalú egységnégyzetet. Ezek hézagatlanul lefedik a síkot. Ha közülük csak azokat tekintjük, amelyek középpontja az r sugarú körbe esik, ezek összterülete éppen $N(r)$. Mivel egy ilyen négyzet pontjainak legnagyobb távolsága a négyzet középpontjától $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a fenti alakzat benne lesz az origó körüli $r + \frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú körben. Hasonlóan, mivel a körön kívüli középpontú négyzetek csak $\frac{\sqrt{2}}{2}$ mélységig tudnak a körbe benyúlni, alakzatunk tartalmazza az $r - \frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kört. Így

$$\pi \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq N(r) \leq \pi \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2,$$

vagyis a $\Delta(r) = N(r) - \pi r^2$ jelöléssel

$$(1.1) \quad |\Delta(r)| \leq \sqrt{2}\pi r + \frac{1}{2} < 5r.$$

Ez az érvelés alig használt valamit a kör tulajdonságaiból, és csipetnyi változtatással szinte minden alakzatra elmondható. Vessük össze pl. a kört a köré írt, $2r$ oldalú négyzettel. Ennek területe $4r^2$, és azon rácspontok vannak benne, amelyek koordinátái $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[r]$, számuk $(2[r] + 1)^2$. A terület és a rácspontok száma különbsége ekkor

$$\Delta^*(r) = (2[r] + 1)^2 - 4r^2 = 4r(1 - 2\{r\}) + (1 - 2\{r\})^2.$$

Mivel r 0 és 1 között változik, $(1 - 2\{r\})$ bármi lehet -1 és 1 között, $\Delta^*(r)$ pedig $-(4r - 1)$ és $4r + 1$ között van, a felső határt néha (r egész értékeinél) felvéve, az alsót csak megközelítve. Ilyen általános gondolatmenettől tehát lényegesen jobb eredményt nem várhatunk.

Annak okát, hogy a négyzetnél ekkora eltérés lehet a terület és a rácspontok száma között, abban vélhetjük fellelni, hogy amikor r áthalad egy egész számon, a rácspontok száma egyszerre $8r$ -et ugrik. Szemléletünk azt sugallja, hogy a kör ilyen disznóságot nem csinál. A körvonalra eső rácspontok száma, vagyis azon (x, y) egész számpárok száma, amelyekre

$$(1.2) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

felírható képlettel, mégpedig az alábbi módon. Ilyen pont persze csak akkor van, ha $r^2 = n$ is egész szám. Bontsuk fel n -et prímtényezőkre, különválasztva a 2 -t, a $4k + 1$ és $4k - 1$ alakú prímekeket:

$$n = 2^a p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k} q_1^{c_1} \dots q_l^{c_l}, \quad p_i \equiv 1 \pmod{4}, \quad q_j \equiv 3 \pmod{4}.$$

E jelölésekkel az (1.2) egyenlet megoldásainak száma, $\varrho(n) = 0$, ha a c_j számok között van páratlan, és

$$(1.3) \quad \varrho(n) = 4(b_1 + 1) \dots (b_k + 1),$$

ha az összes c_j páros. Erről a $\varrho(n)$ mennyiségről belátható, hogy nemcsak $r = \sqrt{n}$ -nél lesz kisebb, de n akármilyen kicsi pozitív kitevőjű hatványánál is, ha n elég nagy. Ha tehát csak ezen múlna, $\Delta(r)$ lehetne kisebb, mint r^ε akármilyen kicsi pozitív ε -nal.

A valóság kevésbé idilli; be lehet látni, hogy

$$(1.4) \quad \limsup \frac{|\Delta(r)|}{\sqrt{r}} = \infty.$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogyan lehet elemi geometriai eszközökkel (kihasználva, hogy a kör nem szögletes) túllépni (1.1)-en, és belátni, hogy

$$(1.5) \quad |\Delta(r)| < Cr^{2/3}$$

alkalmas C konstanssal.

2. Bizonyítás

A továbbiakhoz bevezetjük az alábbi konvenciót: c , indexszel vagy anélkül, pozitív konstanst jelöl (amelyet kiszámolhatnánk, de nem tesszük); a „van olyan pozitív c , hogy” szavakat tehát elblicceljük.

A rácspontok alábbi tulajdonságai, amelyeket használni fogunk, fellelhetők az Erdős–Surányi könyv 4. fejezetében.¹ *Erdős Pál, Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon könyvtár, Szeged, 1996.*

Ha egy egyenesen legalább két rácspont van, akkor már végtelen sok van, és ezek egyenlő távolságban követik egymást (az ilyen egyenes neve *rácsegyenes*). Ha ez a távolság v , akkor az egyenessel párhuzamos rácsegyenesek egymást $\frac{1}{v}$ távolságban követik.

Rács sokszögek azon egyszerű sokszögek, amelyeknek minden csúcsa rácspont. Ezek területe és a bennük lévő rácspontok száma között az alábbi kapcsolat van:

$$(2.1) \quad T = B + \frac{H}{2} - 1,$$

ahol T a terület, B a sokszög belsejében, H pedig a határán lévő rácspontok száma.

A (2.1) képletet írjuk fel a körben lévő legnagyobb rácssokszögre, vagyis a *körben lévő rácspontok konvex burkára*. Tegyük még hozzá, hogy a keresett szám

$$N(r) = B + H,$$

és a kör területe

$$\pi r^2 = T + T',$$

ahol T' a sokszög és a körvonal közti sáv területe. A fentiekből

$$\Delta(r) = \frac{H}{2} + 1 - T';$$

(1.5) bizonyításához tehát elég belátni, hogy

$$H < c_1 r^{2/3} (2.2) sT' < c_2 r^{2/3}. (2.3)$$

A továbbiakban bebizonyítjuk (2.2)-t, és vázoljuk (2.3) bizonyítását. Legyen k a sokszög oldalainak száma. Egy oldalt a rajta levő rácspontok egyenlő szakaszokra osztanak; legyen n_i az i -edik oldalon levő szakaszok száma (tehát $n_i - 1$ belső pont van az oldalon; ha csak a két csúcspont van, akkor $n_i = 1$). A két szomszédos osztópontot összekötő vektor legyen $\vec{v}_i$, ennek hossza v_i ; az oldal hossza tehát $n_i v_i$, (1. ábra) a sokszög kerülete pedig

$$(2.4) \quad \sum n_i v_i \leq 2\pi r$$

(miért is?).

Az oldalegyenes által meghatározott húr hossza legyen l_i , a (kisebbik, a sokszögön kívül eső) körszelet magassága pedig h_i . Az l_i hosszú húr a rácspontok $n_i + 2$ részre osztják, amelyek közül a középső n_i hossza v_i , a két szélsőé kisebb, így

$$(2.5) \quad n_i v_i \leq l_i < (n_i + 2)v_i \leq 3n_i v_i.$$

A továbbiakban az i indexeket általában elhagyjuk.

Eddig nem használtuk ki, hogy nem akármilyen rácssokszög van a körben, hanem a lehető legnagyobb. Ezt pedig így tehetjük meg. Húzzuk meg az oldallal párhuzamos szomszédos rácsegyenest, mégpedig a kör középpontjától távolabbat (2. ábra). Ennek távolsága az oldalegyenestől $\frac{1}{v}$. Ha $h > \frac{1}{v}$, akkor ez metszi a kört, és egy olyan körszeletet vág le, amelynek magassága

$$h' = h - \frac{1}{v}.$$

A húr hossza Püthagorasz tételéből számolható:

$$(2.6) \quad r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r - h)^2 = \left(\frac{l'}{2}\right)^2 + (r - h')^2,$$

tehát

$$\frac{l^2 - l'^2}{4} = (r - h')^2 - (r - h)^2 = (h - h')(2r - h - h') = \frac{1}{v}(2r - h - h') < \frac{2r}{v}.$$

Számolás nélkül is észrevehetjük viszont, hogy $l' < v$, hiszen a rácspontok egymást v távolságban követik, és erre a húrra nem jut rácspont. Emiatt

$$(2.7) \quad l^2 < l'^2 + \frac{8r}{v} < v^2 + \frac{8r}{v}.$$

Ha $h \leq \frac{1}{v}$, akkor ez az egyenes a kört nem metszi. (2.7) ekkor is igaz, mert

$$l^2 = 4(r^2 - (r-h)^2) = 4h(2r-h) < 8rh \leq \frac{8r}{v}.$$

Mivel $l \geq nv$, ezért (2.7) azt adja, hogy

$$(2.8) \quad (n^2 - 1)v^2 \leq \frac{8r}{v}.$$

Innen

$$(2.9) \quad n^2 \leq \frac{8r}{v^3} + 1.$$

Foglalkozunk először azokkal az oldalakkal, ahol $v < 2r^{1/3}$. Itt (2.9)-ben az első tag a nagyobb, és így $n^2 \leq \frac{16r}{v^3}$,

$$n \leq \frac{4r^{1/2}}{v^{3/2}}.$$

Legyen

$$H_1 = \sum_{v_i < 2r^{1/3}} n_i;$$

ekkor tehát

$$(2.10) \quad H_1 < 4\sqrt{r} \sum_{v_i < 2r^{1/3}} v_i^{-3/2} \leq 4\sqrt{r} \sum_{v < 2r^{1/3}} v^{-3/2},$$

ahol a második összegzés az összes legfeljebb $2r^{1/3}$ hosszú vektorra kiterjed, nemcsak azokra, amelyek valamelyik oldal irányába mutatnak.

Egy ilyesféle összeget így lehet becsülni. Legyen az összegzés határa a (most tehát $a = 2r^{1/3}$). Nézzük először azokat a vektorokat, amelyek hossza $\frac{a}{2} \leq v < a$. Ezek száma legfeljebb annyi, mint az origótól különböző rácspontok száma az origó körüli a sugarú körben, tehát kisebb, mint $c_3 a^2$ (most a legdurvább becslés is elég nekünk), egy összeadandó pedig kisebb, mint $\left(\frac{a}{2}\right)^{-3/2}$, ez a részösszeg tehát kisebb, mint $c_4 \sqrt{a}$. Ezt a becslést a helyett elvégezzük az $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots, \frac{a}{2^j}$ számokra, amíg csak $\frac{a}{2^j} < 1$ nem lesz, és az eredményt összeadjuk:

$$\sum v^{-3/2} < c_4 \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{2^i}} = c_5 \sqrt{a}.$$

Ezt (2.10)-be helyettesítve

$$H_1 < c_6 \sqrt{r} \sqrt{r^{1/3}} = c_6 r^{2/3}.$$

A $v \geq 2r^{1/3}$ esethez tartozó H_2 összeget pedig (2.4)-ből becsülhetjük azonnal:

$$H_2 = \sum_{v_i \geq 2r^{1/3}} n_i \leq \frac{1}{2} r^{-1/3} \sum n_i v_i \leq \pi r^{2/3}.$$

H_1 és H_2 becslését összeadva (2.2)-t beláttuk.

Foglalkozunk most T' becslésével. Egy körszelet területe

$$t_i < l_i h_i;$$

a körszeletek lefedik (átfedéssel) a sokszög és a körvonal közti sávot, tehát

$$T' < \sum t_i < \sum l_i h_i.$$

h és l között kapcsolat van: Püthagorasz (2.6) alatt felírt tételéből

$$h = \frac{l^2}{4(2r-h)} < \frac{l^2}{4r}.$$

Tehát $t < hl < \frac{r^3}{r}$, és (2.5) miatt $1 < 3nv$, ezért végül

$$(2.11) \quad t < c_7 \frac{n^3 v^3}{r}.$$

Ha $v \leq 2n^{1/3}$, akkor az $n \leq 4r^{1/2}v^{3/2}$ egyenlőtlenség miatt $t < c_9n$, úgyhogy az ehhez az esethez tartozó területek összege $< c_9B < c_{10}r^{2/3}$.

A hátralevő eset – azon szeletek területét becsülni – ahol v nagy, komplikáltabb az eddigieknél. Mindenesetre (2.9)-ből látszik, hogy $n = 1$, de t nem lesz általában korlátos. Ha pl. r alig nagyobb egy n egész számnál, $n^2 < r^2 < n^2 + 1$, akkor az $(n, 0)$ pontot az $(n-1, \lfloor \sqrt{2n-1} \rfloor)$ ponttal egy kb. $\sqrt{2n}$ hosszú oldal köti össze, amely egy $\sqrt{n}$ nagyságrendű szeletet jelent. Ez az oldal „közel függőleges”; be lehet bizonyítani, hogy általában azok a hosszú oldalak, amelyeken csak a két csúcspont van, közel párhuzamosak egy kicsi vektorral. Ezt csak felszínesen vázoljuk, a számítások elvégzése nélkül.

Mivel v nagy ($> 2r^{1/3}$), $l \geq v$ is nagy és $h \approx l^2/r$ nagy $\frac{1}{v}$ -hez képest. Ekkor a szomszédos rácsegyeneshez tartozó l' húr alig rövidebb l -nél. Mivel pedig rajta a rácspontok $v \leq l$ távolságra vannak, a húr két oldalán levő rácspontok a körvonaltól legfeljebb $l-l'$ távolságra vannak (3. ábra). Erről kiszámolható (újra Püthagorasz tételével), hogy kisebb, mint $c\frac{r}{v^2}$. A két csúcspontból ehhez a két rácsponthoz vezető $\vec{w}$ vektornak $\vec{v}$ irányú komponense tehát legfeljebb ekkora, a rá merőleges komponens pedig pontosan $\frac{1}{v}$, jóval kisebb. Ez a „közel párhuzamos” kicsi vektor (az ábra erősen torzít).

Mivel $v < c\sqrt{\frac{r}{w}}$ és $t < c\frac{v^3}{r}$, ezért $t < c\frac{\sqrt{r}}{w^{3/2}}$. Ez ugyanarra az összegre vezet, amit már egyszer kiszámítottunk; a baj csak az, hogy egy $\vec{w}$ vektor többször is előfordulhat. Némi fejtevéssel bizonyítható, hogy nemcsak egy körszelet területe becsülhető $\frac{\sqrt{r}}{w^{3/2}}$ -nel, hanem az adott $\vec{w}$ -hez tartozó összes körszeletek területeinek összege is.

3. Megjegyzések

1. Az (1.3) képlet bizonyítása megtalálható pl. a Turán–Gyarmati jegyzetben² *Gyarmati Edit*: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó (ELTE-jegyzet). Ez a képlet mutatja, hogy $\varrho(n) \leq 4\tau(n)$, ahol τ az osztók száma. $\tau(n) < n^\varepsilon$ nagy n -re.³1. *Erdős Pál–Surányi János*: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996. 8. fejezet X. tétel.

2. (1.4)-nél több is igaz, éspedig

$$\limsup \frac{\Delta(r)}{\sqrt{r}} = \infty, \quad \liminf \frac{\Delta(r)}{\sqrt{r}} = -\infty.$$

Az első eredmény G. H. Hardytól származik 1915-ből, a második A. E. Inghamtól 1940-ből. Azóta mindkét tételt némileg erősítették, mégpedig a nevezőbe betettek egy-egy végtelenhez tartó függvényt ($\log r$ hatványát).

3. A kiinduló r -es becslés Gausstól származik; az $r^{2/3}$ -os javítás Sierpińskitől 1906-ból. W. Sierpiński bizonyítása hosszú; többen készítettek egyszerű bizonyítást, rendszerint többé-kevésbé analitikus módon.

Az $r^{2/3}$ -os becslés javításával sokan küszködtek, egy-egy hajszálnyit csökkentve a kitevőn. A rekord $\frac{46}{73} \approx 0,630137$. Általában azt sejtik, hogy az igazság $\frac{1}{2}$, vagyis $\frac{|\Delta(r)|}{r^t}$ bármely $t > \frac{1}{2}$ kitevőre korlátos. Ez irányban ismert, hogy $\Delta(r)$ „rendszerint” nem nagyobb, mint $\sqrt{r}$ abban az értelemben, hogy

$$\int_0^R \Delta(r)^2 < cR^2$$

Ez az eredmény E. G. H. Landautól származik.

Az itt leírt bizonyításnak $r^{2/3}$ a természetes határa. $\frac{\Delta(r)}{r^{2/3}} \rightarrow 0$ bizonyítása elképzelhető volna úgy, hogy belátjuk, hogy $\frac{H}{r^{2/3}} \rightarrow 0$ és $\frac{T'}{r^{2/3}} \rightarrow 0$; ezek viszont nem igazak, sőt az sem, hogy

$$\frac{H}{r^{2/3}} \rightarrow a, \quad \frac{T'}{r^{2/3}} \rightarrow \frac{a}{2}$$

valamely a konstanssal. H és T' között tehát nemtriviális kapcsolat van, amelynek jellegéről nem tudunk semmit.

4. Lehetséges, hogy Q nagy pozitív és negatív kilengései máshogy viselkednek. Mindenesetre a pozitív és negatív becslések bizonyítása gyakran másmilyen és nem is ugyanolyan erősek. A mi bizonyításunkban is, amikor beláttuk (2.2)-t, ezzel már megkaptuk, hogy $\Delta(r) < cr^{2/3}$, míg az alsó becslés további kínlódással jár.

Ruzsa Z. Imre

