

1. Az egyenlet gyökei akkor valósak, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz ha

$$4(m+1)^2 - 4 \cdot 2(m^2 + 2m) \geq 0,$$

ami akkor teljesül, ha

$$-1 - \sqrt{2} \leq m \leq -1 + \sqrt{2}.$$

Mivel $x_1 + x_2 = -(m+1)$ és $4x_1x_2 = 4 \cdot \frac{m^2 + 2m}{2} = 2m^2 + 4m$, azért

$$f(m) = 2m^2 + 3m - 1.$$

$f(m)$ legkisebb értéke a $[-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}]$ intervallumon $-\frac{17}{8}$, amit az $m = -\frac{3}{4}$ helyen vesz fel, míg legnagyobb értéke $2\left(\frac{1}{4} + \sqrt{2}\right)^2 - \frac{17}{8}$, amit az $m = -1 - \sqrt{2}$ helyen vesz fel.

2. a) Ismeretes, hogy minden háromszögben $\varrho = \frac{T}{s}$ és $r = \frac{abc}{4T}$, így $\varrho r = \frac{abc}{4s}$.

b) A háromszög egyik oldala 2 egység, a másik két oldal összege 4 egység. Célszerű jelöléssel a két oldal $2-x$, illetve $2+x$, ahol $0 \leq x < 1$. A szóban forgó körök területének szorzata

$$f(x) = \varrho^2 \pi \cdot r^2 \pi = \pi^2 (\varrho r)^2 = \pi^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot (2-x)(2+x)}{4 \cdot 3} \right)^2,$$

hiszen $2s = 6$, $s = 3$.

Az $f(x) = \frac{\pi^2}{36}(4-x^2)^2$ függvény a $[0, 1)$ intervallumban akkor a legnagyobb, ha $x = 0$, hiszen $4-x^2 > 0$, és így a négyzete akkor a legnagyobb, ha $4-x^2$ a legnagyobb.

Az $f(x)$ legnagyobb értéke $\frac{4}{9}\pi^2$, ami akkor adódik, ha a háromszög egyenlő oldalú.

3. Ha van ilyen k , azaz $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ és $c_1 = kc_2$, akkor

$$f(x) = \frac{k(a_2x^2 + b_2x + c_2)}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = k, \quad \text{tehát } f(x) \text{ értéke állandó.}$$

Ha $f(x)$ értéke állandó minden megengedett x -re, azaz

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = K,$$

akkor

$$(1) \quad (a_1 - Ka_2)x^2 + (b_1 - Kb_2)x + (c_1 - Kc_2) = 0,$$

azaz az (1) *legfeljebb* másodfokú egyenletnek kettőnél több megoldása van, ami csak úgy lehetséges, hogy minden együttható nulla (a polinom azonosan nulla), tehát $a_1 - Ka_2 = 0$, $b_1 - Kb_2 = 0$, $c_1 - Kc_2 = 0$, így valóban van olyan $K \in \mathbf{R}$, hogy $a_1 = Ka_2$, $b_1 = Kb_2$ és $c_1 = Kc_2$.

4. A rekurzív definícióból következik, hogy

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-2} - 2a_{n-1} = (-2)(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

A $b_k = a_{k+1} - a_k$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ különbségsorozat a $q = -2$ hányadosú mértani sorozat, $b_1 = a_2 - a_1 = 1$, ezért $b_k = (-2)^{k-1}$. Így

$$a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = -2, a_4 - a_3 = 4, \dots, a_n - a_{n-1} = (-2)^{n-2}.$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$a_n - a_1 = \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)},$$

ahonnan $a_n = 1 + \frac{1}{3}(1 - (-2)^{n-1}) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{n-1}$.

$$S_n = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3}(1 - 2 + \dots + (-2)^{n-1}) = \frac{4}{3}n - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{4}{3}n - \frac{1}{9}(1 - (-2)^n).$$