[1] *Helyesbítés.* Októberi számunkban a mérőlap ajánlásában szereplő szegedi Radnóti Miklós Gimnázium korábban Klauzál Gábor nevét viselte. A 6. feladatban C helyett X-et írtunk.

1. A bal, illetve a jobb oldalon álló két-két törtkifejezés összeadása után a

$$\frac{2x^2-4}{x^2-1}=\frac{2x^2-24}{x^2-9}-\frac{28}{15}$$

egyenletet kapjuk. Rendezés után $7x^4-55x^2+108=0$, ahonnan $x^2=4$ vagy $x^2=\frac{27}{7}$. Az egyenletnek négy megoldása van: $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_4=-3\sqrt{\frac{3}{7}}$.

2. Az ismert $a=2r\sin\alpha$, $b=2r\sin\beta$, $c=2r\sin\gamma$ összefüggések alkalmazásával, ahol r a háromszög köré írható kör sugara,

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha=\frac{b^2}{4r^2}+\frac{c^2}{4r^2}-2\cdot\frac{b}{2r}\cdot\frac{c}{2r}\cdot\cos\alpha=$$
$$=\frac{1}{4r^2}(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)=\frac{a^2}{4r^2}=\sin^2\alpha.$$

3. Mivel $-x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ minden valós x-re negatív, ezért a két egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$-3x^2+3x-3<x^2+ax-2<2x^2-2x+2,$$

tehát a

$$4x^2+(a-3)x+1>0 \qquad \text{és az} \qquad x^2-(a+2)x+4>0$$

minden valós x-re. Ezért mindkét másodfokú kifejezésnek negatív lesz a diszkriminánsa.

$(a-3)^2-16<0,$ és az $(a+2)^2-16<0, -4<a-3<4$és$-4<a+2<4, -1<a<7$és$-6<a<2.$

Az egyenlőtlenség $-1<a<2$ esetén teljesül minden valós x-re.

4. Az $APDB$ húrnégyszög köré írt kör két szelője CA, illetve CB.

A szelőtétel szerint $CP\cdot CA=CD\cdot CB$. Mivel $CA^2=2,4^2+4,5^2=5,1^2$, ezért $CA=5,1$. Legyen $AP=y$. Most $5,1\cdot(5,1-y)=2,4\cdot4,8$, ahonnan $y=5,1-\frac{2,4-4,8}{5,1}$, $y=AP\approx2,84$ egység.

A feladat hasonlóság, területszámítás és trigonometria alkalmazásával is megoldható.

5. Mivel (a szokásos jelölésekkel)

$$(n+k)(S_n-S_k)=(n+k)\cdot\frac{n}{2}\left((2a_1+(n-1)d)-\frac{k}{2}(2a_1+(k-1)d)\right)=$$
$$=\frac{n+k}{2}\cdot(n-k)(2a_1+(n+k-1)d),$$

és $(n-k)S_{n+k}=(n-k)\cdot\frac{n+k}{2}\cdot(2a_1+(n+k-1)d)$, ezért igaz az állítás.

6. Mivel $AB^2=16+25=41$, $AB=\sqrt{41}$, ezért a C ponthoz tartozó m magasság (a C pont távolsága az AB egyenestől) $m=\frac{18}{\sqrt{41}}$, hiszen $9=\frac{\sqrt{41}\cdot m}{2}$.

Az AB egyenes egyenlete: $5x-4y+20=0$. A $C(x;7)$ pont távolsága ettől az egyenestől $\frac{18}{\sqrt{41}}$ egység, tehát $\frac{|5x-4\cdot7+20|}{\sqrt{41}}=\frac{18}{\sqrt{41}}$, azaz

$$5x-8=18, \qquad \text{vagy} \qquad 5x-8=-18$$
$$x_1=\frac{26}{5} \qquad \text{vagy} \qquad x_2=-2.$$
$$C_1\left(\frac{26}{5};7\right), \qquad C_2(-2;7).$$

[1] *

7. Mivel az x^2 együtthatója pozitív, ezért $x_1 < a < x_2$ pontosan akkor teljesül, ha a másodfokú kifejezés az $x = a$ helyen negatív, azaz

$$2a^2 - 2(2a+1) \cdot a + a(a-1) < 0,$$
$$-a^2 - 3a < 0.$$

Ez akkor teljesül, ha $a < -3$ vagy $a > 0$. Ezekre az a értékekre az eredeti egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát létezik két (valós) gyöke.

8. a) Az egyenletnek pontosan akkor van két egyenlő valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$D = 4(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha) - 4(1 + 2\cos\alpha).$$

$D = 0$, ha $\cos\alpha \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha) = 0$, azaz ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vagy $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
(Az egyenlet ekkor: $(x-1)^2 = 0$, $(x+1)^2 = 0$, $(x-\sqrt{2})^2 = 0$, $(x+\sqrt{2})^2 = 0$.)

b) Az egyenletnek két különböző valós gyöke akkor van, ha a diszkriminánsa pozitív.

Mivel $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, azért

$$\cos\alpha \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

kell teljesüljön. Ez akkor teljesül, ha $\cos\alpha > 0$ *és* $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ vagy $\cos\alpha < 0$ és $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) < 0$, tehát

$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ és $2k\pi < \alpha - \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi$ $(k,\, n \in \mathbf{Z})$
vagy $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ és $\pi + 2k\pi < \alpha - \frac{\pi}{4} < 2\pi + 2k\pi$, $(n,\, k \in \mathbf{Z})$,
azaz $\frac{\pi}{4} + 2m\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ vagy $\frac{5\pi}{4} + 2l\pi < \alpha < \frac{3\pi}{6} + 2l\pi$ esetén $(m,\, l \in \mathbf{Z})$.

Rábai Imre