

Az **Ericsson TrafficLab** kutatólaboratórium által kiírt feladatra (ld. KöMaL 1998/1. sz. 19. o.) *Schumayer Dániel* és *Lukács László* küldött be lényegében jó megoldást. Az Ericsson mindkettőjüket különdíjban részesíti, amelyet a KöMaL szerkesztőségben vehetnek át.

A megoldáshoz felhasználjuk Schumayer Dániel dolgozatát.

A valószínűségi számítás elméletének egyik alapvető tétele a következő:

Az **Ericsson TrafficLab** kutatólaboratórium által kiírt feladatra (ld. KöMaL 1998/1. sz. 19. o.) *Schumayer Dániel* és *Lukács László* küldött be lényegében jó megoldást. Az Ericsson mindkettőjüket különdíjban részesíti, amelyet a KöMaL szerkesztőségben vehetnek át.

A megoldáshoz felhasználjuk Schumayer Dániel dolgozatát.

A valószínűségi számítás elméletének egyik alapvető tétele a következő:

**Moivre–Laplace tétel:** Ha  $A_1, \dots, A_n$  független,  $p$  valószínűséggel bekövetkező események, és  $\eta_n$  az  $A_1, \dots, A_n$ -ek közül bekövetkező események száma, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( a \leq \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a), \quad \text{ahol} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Sőt, az is igaz, hogy van olyan  $K > 0$  ( $a$ -tól és  $b$ -től nem függő) konstans, hogy

$$\left| P \left( a \leq \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| < \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

$\Phi(x)$  szigorúan monoton növekvő (és folytonos) függvény.

Jelölje  $C_N$  az  $N$ -hez tartozó legkisebb megfelelő  $C$ -t, tehát

$$P \left( \sum_{i=1}^n X_i \leq C_N \right) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{és} \quad \forall a > 0 \text{-ra} \quad P \left( \sum_{i=1}^n X_i \leq C_N - a \right) < 1 - \varepsilon.$$

$a = -\infty$ ,  $b = \frac{C_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$ -vel alkalmazva a Moivre–Laplace tételt kapjuk, hogy  $\forall \xi > 0$ -ra, ha  $N$  elég nagy, akkor

$$-\xi < P \left( \sum_{i=1}^n X_i \leq C_N \right) - \Phi \left( \frac{C_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \right) < \xi.$$

Válasszuk  $\xi$ -t  $\frac{1}{2} - \varepsilon$ -nak. Ekkor az előző egyenlőtlenségből ha  $N$  elég nagy, akkor egyrészt

$$1 - \varepsilon - \Phi \left( \frac{C_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \right) < \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

amit átrendezve,  $\Phi$  monotonitásából

$$\frac{C_N}{N} > \frac{\Phi^{-1}(\frac{1}{2})}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} + p = p,$$

mivel  $\Phi^{-1}(1/2) = 0$ . A másik egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\frac{C_N}{N} < \frac{\Phi^{-1}(\frac{1}{2})}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} + \frac{a}{N} + p = p + \frac{a}{N}.$$

Azaz, ha  $N$  elég nagy, akkor  $p < \frac{C_N}{N} < p + \frac{a}{N}$ . Ebből pedig a „rendőrlv” alapján  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_N}{N} = p$  adódik.

Veres András