1. Rendezzük a következő alakra az egyenletet: $\sqrt{x^2-10x+30}=-x^2+10x-18$. Legyen $x^2-10x+30=y$. Ekkor a $\sqrt{y}=12-y$ egyenletet kell megoldanunuk. Így $0\le y\le 12$, és ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. A négyzetre emelés és a rendezés után kapjuk: $y^2-25y+144=0$. Ebből $y_1=9$, $y_2=16$, de a feltételeknek csak a 9 felel meg. Az $x^2-10x+30=9$ egyenletből $x_1=3$, $x_2=7$ adódik.

2. Azt láthatjuk, hogy a CF szakasz vízszintes és 3 egység magasan helyezkedik el. Legyenek a függőlegesek megfelelő talppontjai: A', B', C', D', E', F'. Ekkor az $AA'D'D$ derékszögű trapézról tudjuk, hogy a párhuzamos oldalai, $AA'=4$, $DD'=6$ egység ($A'D'=20$, de ezt most nem is fogjuk felhasználni). A látszólagos metszéspont az AD felezőpontja, ami jelen esetben a függőlegesen álló középvonal egyik végpontja. A párhuzamos oldalak számtani közepe adja a középvonal hosszát, ezért az AD felezője 5 egység magasan van. Hasonlóan gondolkodhatunk a $BB'E'E$ derékszögű trapézról is. A megfelelő adatokkal kapjuk, hogy BE felezője 4 egység magasan van. Vagyis a valóságban 1-1 egység távolság van függőlegesen a kérdéses egyenesek között a látszólagos metszéspontnál úgy, hogy itt AD van a legmagasabban és CF a legalacsonyabban.

3. Mivel $\overline{c}$ prím, azért 2, 3, 5, 7 a lehetséges értékek, de $\overline{bc}$ is prím, ezért a 2, 5 kizárt, vagyis $\overline{c}$ csak 3 vagy 7 lehet. Mivel $\overline{ab}$ prím, azért b csak 1, 3, 7, 9 lehet. Vegyük figyelembe, hogy a számjegyek összege 26, valamint a c lehetséges értékeit is; ekkor b csak 7 vagy 9 lehet, mert a többi kevés lenne. A $\overline{bbc}$ lehetséges értéke ezek alapján 773, 993, 997, de ennek is prímszámnak kell lenni. A 993 osztható 3-mal, a 773, valamint a 997 prímszám (ellenőrizhetjük, vagy nézzük meg a függvénytáblázatban). Mivel a számjegyek összege 26, azért már csak két ilyen számra gondolhatunk: a 9773-ra vagy az 1997-re. Mivel $9773=29\cdot 337$, az 1997-ről pedig megállapíthatjuk, hogy prím, azért csak egy ilyen szám van, az 1997.

Megjegyzés. Ha a feltételek között nem szerepelt volna a számjegyek összegére vonatkozó megszorítás, akkor hosszabb, de hasonló vizsgálattal jutottunk volna el a megoldáshoz. Akinek van egy kis türelme, fejezze be így is a vizsgálatot! Biztosan kap új számot, mert így a 4337 is megfelel.

4. Mivel C pont az EF szakasz belső pontja, azért $C(c;9-c)$, ahol $0<c<9$ valós szám. A c és az adott pontok segítségével kifejezhetjük a következő pontok koordinátáit:

$$Q\left(\frac{12+c}{3};\frac{9-c}{3}\right),$$
$$R\left(\frac{2c}{3};\frac{24-2c}{3}\right),$$
$$M\left(\frac{2c+6}{6};\frac{24-2c}{6}\right),$$
$$N\left(\frac{12+c}{6};\frac{21-c}{6}\right),$$
$$K\left(\frac{c}{2};\frac{9-c}{2}\right),$$
$$L(3,3).$$

MN=$\sqrt{\left(\frac{c-6}{6}\right)^2+\left(\frac{3-c}{6}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{c-6}{2}\right)^2+\left(\frac{3-c}{2}\right)^2}, KL=\sqrt{\left(\frac{c-6}{2}\right)^2+\left(\frac{3-c}{2}\right)^2}=3\cdot MN.Vagyisacrtktlfggetlenlak$

5. A megoldandó egyenlet: $2\sin^6 x-3\sin^4 x+\sin^2 x+2\cos^6 x-3\cos^4 x+\cos^2 x=0$, ezt ilyen alakban is írhatjuk: $2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sin^2 x+\cos^2 x=0$. Alkalmazzuk a következő átalakításokat:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-3\sin^2 x\cos^2 x,$$
$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x,\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Ekkor a behelyettesítések utáni egyenlet: $2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+1=0$. A beszorzások és összevonások után a bal oldalon is 0 lesz, vagyis azonosságot kaptunk, így minden valós szám megoldása az egyenletnek.

6. A feladatban szereplő kifejezés értelmezési tartománya: csak pozitív számnak van logaritmusa, ezért $x>0$, továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért $x\ne 10^5$, valamint $x\ne 10^{-1}$. Mivel $9,8=\dfrac{98}{10}=\dfrac{49}{5}=\left(\dfrac{7}{\sqrt5}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt5}{7}\right)^{-2}$, így az eredeti egyenlet így írható: $\left(\dfrac{\sqrt5}{7}\right)^{\frac{2}{-5+\lg x}-\frac{4}{1+\lg x}}=\left(\dfrac{\sqrt5}{7}\right)^{-2}$. Ebből kapjuk: $\dfrac{2}{-5+\lg x}-\dfrac{4}{1+\lg x}=-2$. A közös nevezővel, $(-5+\lg x)(1+\lg x)$-szel szorozhatunk, és (-2)-vel oszthatunk: $2(-5+\lg x)-(1+\lg x)=(-5+\lg x)(1+\lg x)$. A beszorzások és összevonások után kapjuk: $\lg^2 x-5\lg x+6=0$, amiből $\log x_1=2$, $\lg x_2=3$. Így a megoldások: $x_1=100$, $x_2=1000$.

7. Legyen a két metszéspont A és B. Legyen egy tetszőleges, de a metszéspontoktól különböző pont az egyik körvonalon C, a másikon D. Mivel a körvonalak nem egy síkban vannak, azért $ABCD$ egy tetraédert határoz meg. Minden tetraéder köré lehet gömböt írni (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye, I. 1946. feladat). Az $ABCD$ tetraéder köré írt gömböt az ABC háromszögre illeszkedő síkkal, illetve az ABD háromszögre illeszkedő síkkal metszve a két háromszög köré írt két kör pontosan az eredetileg megadott egymást metsző két kör lesz. Így beláttuk, hogy létezik a keresett gömbfelület.

8. Jelöljük n-nel annak a napnak a sorszámát, amikor befejezik a munkát. Ha az n értéke 1, 2 vagy 3, akkor nem lehet szétosztani az aranyat, ezt könnyen ellenőrizhetjük. Az n-edik napig $1+2+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ gramm aranyat ástak ki. A feltétel szerint ennek oszthatónak kell lennie 3-mal, ami azt jelenti, hogy $3 \mid n$ vagy $3 \mid (n+1)$.

Még azt is meg kell mutatnunk, hogy ha $3 \mid n$ vagy $3 \mid (n+1)$, akkor a szétosztás valóban elvégezhető.

Ha $n=5$, akkor a szétosztás: $1+4$, $2+3$, 5. Ha $n=6$, akkor: $1+6$, $2+5$, $3+4$. Ha $n=8$, akkor: $1+2+3+6$, $4+8$, $5+7$. Ha $n=9$, akkor: $1+2+3+4+5$, $6+9$, $7+8$.

Egy nagyobb n esetén, amelyre $3 \mid n$ vagy $3 \mid (n+1)$, a következő módon készíthetünk egy elosztást. Határozzuk meg az n 6-tal való osztási maradékát, ez 5, 0, 2 vagy 3 lehet, ezekhez rendre az első 5, 6, 8 vagy 9 értéket az előbb leírtak alapján mát szétoszthatjuk. Továbbá még 6-tal osztható számú aranyunk van. Itt pedig felhasználjuk, hogy egymást követő hat egész szám esetén $(k+1)+(k+6)=(k+2)+(k+5)=(k+3)+(k+4)$, így a feltételnek eleget tevő minden számra megvalósítható a szétosztás, vagyis minden olyan napon befejezhetik a munkát, amelynek a sorszáma 3-nál nagyobb, és hárommal osztható, vagy hárommal osztva 2-t ad maradékul.

Számadó László