

Egy geometriai feladatpár

Legyen adva az S síkon három pont, A , B és C , melyek egy hegyesszögű háromszöget alkotnak. A pontokkal kapcsolatban két feladatot fogalmazunk meg, és célunk a két feladat kapcsolatának vizsgálata.

1. feladat: Keresendő az a D pont, amelynek össztávolsága az adott pontoktól, azaz az $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}$ összeg, minimális. A feladat formálisan az alábbi módon írható le:

$$(1) \quad \min_{D \in S} \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}.$$

2. feladat: Fekteszünk át az A , B , C pontokon egy-egy egyenest úgy, hogy a keletkező $A'B'C'$ háromszög szabályos legyen. Keresendő az összes ilyen háromszög közül az, amelyiknek legnagyobb a magassága. Jelölje $h(A'B'C')$ a háromszög magasságát. Ekkor a feladat formálisan felírva a következő:

$$(2) \quad \max_{A'B'C' \text{ szabályos } \triangle} h(A'B'C').$$

Megjegyezzük, hogy nem teljesen nyilvánvaló, hogy a feladatoknak van optimális megoldása, azaz van olyan D pont, illetve $A'B'C'$ háromszög, amelyre a keresett magasság maximális, illetve minimális, de az optimális megoldások létezését be fogjuk bizonyítani.

Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ legkisebb szöge, ha több ilyen is van, akkor az egyik ilyen, a B csúcsnál van. Vegyünk fel az A ponton keresztül egy olyan e egyenest, amelynek B és C ugyanazon az oldalán fekszik. Ez lesz az $A'B'C'\triangle$ első oldalegyenesese. Ekkor egyértelműen meghatározott az a két, e_1 és e_2 egyenes, amely keresztül megy a B ponton, és az e egyenessel 60 fokos szöget zár be. Azt állítjuk, hogy az A és C pont a két egyenes közül legalább az egyik esetében az egyenes ugyanazon oldalán fekszik, megengedve azt is, hogy A és C rajta legyen az egyenesen. Ha ugyanis nem így volna, akkor A és C az e_1 és e_2 által alkotott két csúcsszögpar egyikének két különböző szögtartományának belsejében volna, ami azt jelenti, hogy az ABC szög nagyobb 60 foknál, ami lehetetlen, hiszen így az $ABC\triangle$ szögeinek összege nagyobb volna 180 foknál (1. ábra). A keresett $A'B'C'\triangle$ második oldalegyenesének e_1 és e_2 közül azt választjuk tehát, amelynek ugyanazon oldalán fekszik A és C . Ekkor a háromszög harmadik, C -n keresztül menő egyenesese egyértelműen meghatározott. Mivel a kiindulásul szolgáló e egyenest végtelen sokféleképpen lehet felvenni, ezért a (2) feladatban a maximumot egy végtelen halmazon keressük.

Az $ABC\triangle$ oldalegyenesesei hét részre osztják fel az S síkot. A háromszög maga egy ezek közül, három egy-egy szöge csúcsszögének szögtartománya, míg további három szögeinek szögtartományából az a rész, amely a háromszögon kívül fekszik. Tegyük fel, hogy a D pont az A csúcsnál fekvő szög csúcsszögének tartományában van (2. ábra). Ekkor a BAD szög legalább akkora, mint a BAC szög kiegészítő szöge, tehát a BAD szög tompa szög. Innen az adódik, hogy a $BAD\triangle$ BD oldala nagyobb, mint a BA oldal. Hasonlóképp a CAD háromszögben CA rövidebb, mint CD . Tehát a D pont helyett előnyösebb az A pontot választani, hiszen $\overline{AA} + \overline{BA} + \overline{CA} = \overline{BA} + \overline{CA} < \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}$. Tegyük most fel, hogy a D pont az A csúcsnál fekvő szög szögtartományának a háromszögon kívül eső részében van. Legyen E az AD szakasz metszéspontja a BC oldallal. Az AEB és AEC szögek közül az egyik legalább derékszög. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez az AEB szög. Tehát a CED szög is legalább derékszög, így a $CED\triangle$ leghosszabb oldala CD . Innen már megmutatható, hogy az E pont jobb választás, mint D . Ugyanis $\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD} = \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{BD} + \overline{CD} > \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{BD} + \overline{CE} > \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{CE}$. Az utolsó lépésben az $EBD\triangle$ -re vonatkozó $\triangle$ -egyenlőtlenséget használtuk fel. Tehát az 1. feladathoz tartozó optimális D pontot az $ABC\triangle$ -ben kell keresni.

Az alábbiakban bebizonyítottunk két tételt a feladatpárra vonatkozóan. A tételek tipikusak abban az értelemben, hogy valahányszor dualitásról beszélünk valamely feladatpár esetén, akkor ugyanilyen szerkezetű tételeket igyekszünk bizonyítani.

1. tétel: Legyen az $ABC\triangle$ hegyesszögű, és ennek egy tetszőleges pontja D . Legyen $A'B'C'$ egy tetszőleges olyan szabályos háromszög, amelynek oldalegyenesesei átmennek az A , B és C pontokon. Jelölje $h(A'B'C')$ a háromszög magasságát. Ekkor

$$(3) \quad h(A'B'C') \leq \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az A , B , C pontok rendre a $B'C'$, $C'A'$ és $A'B'$ oldalakon vannak.

A szabályos háromszög területét egyértelműen meghatározza a magassága, minél nagyobb a magasság, annál nagyobb a terület. Az $A'B'C'\triangle$ -et a D pont az $A'B'D$, $B'C'D$ és $C'A'D$ háromszögekre bontja, tehát az előbbi területe az utóbbiak területeinek összege. A DC , DA és DB szakaszok legalább akkorák, mint az utóbbi háromszögek magasságai. Felhasználva, hogy az $A'B'C'\triangle$ szabályos, területére a következő becslést kapjuk.

$$T_{A'B'C'\triangle} = \frac{1}{2} \overline{A'B'} h(A'B'C') \leq \frac{1}{2} \overline{A'B'} (\overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}).$$

Innen $\overline{A'B'}$ -vel való osztás útján adódik az állítás.

2. tétel: Legyen az $ABC\triangle$ hegyesszögű az S síkon. Legyen $A'B'C'$ egy tetszőleges olyan szabályos háromszög, amelynek oldalegyenesei átmennek az A , B és C pontokon. Jelölje $h(A'B'C')$ a háromszög magasságát. Ekkor

$$(4) \quad \max_{A'B'C' \text{ szabályos } \triangle} h(A'B'C') = \min_{D \in S} \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}.$$

Bizonyítás: A fentiek szerint elegendő csak a háromszögbe eső D pontokat vizsgálni. Az előző tételből következik, hogy ha találunk egy $\hat{D}$ pontból és egy $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'\triangle$ -ből álló párt, amelyre $h(\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}') = \overline{A\hat{D}} + \overline{B\hat{D}} + \overline{C\hat{D}}$ teljesül, akkor a $\hat{D}$ pont az 1. feladatnak, az $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'$ háromszög a 2. feladatnak optimális megoldása. Ugyanis a (3) egyenlőtlenséget alkalmazva az adott esetre azt kapjuk, hogy bárhogy is válasszuk meg a $\hat{D}$ pontot és az $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'$ háromszöget, a háromszög magassága nem lehet nagyobb, mint $\overline{A\hat{D}} + \overline{B\hat{D}} + \overline{C\hat{D}}$. Tehát ha egyenlő vele, akkor a lehető legnagyobb, azaz maximális. Hasonlóan okoskodva az $\overline{A\hat{D}} + \overline{B\hat{D}} + \overline{C\hat{D}}$ összeg esetében azt kapjuk, hogy ha az egyenlőség teljesül, akkor az összeg értéke a lehető legkisebb, azaz minimális. Ilyen pár pedig létezik, válasszuk ugyanis a $\hat{D}$ pontnak azt, ahonnan az $ABC\triangle$ mindhárom oldala 120 fok alatt látszik. (Ez a pont megkapható, mint az AB és AC oldalak fölé írt megfelelő látóörök metszéspontja.) Az $A'B'C'\triangle$ -et pedig azok az egyenesek alkotják, amelyek az AD , BD , CD szakaszokra rendre az A , B , C pontokban merőlegesek. Ezért felhasználva a háromszög szabályos voltát nyerjük, hogy

$$T_{A'B'C'\triangle} = \frac{1}{2} (\overline{A'B'} \times \overline{CD} + \overline{B'C'} \times \overline{AD} + \overline{C'A'} \times \overline{BD}) = \frac{1}{2} \overline{A'B'} (\overline{CD} + \overline{AD} + \overline{BD}).$$

Másfelől tudjuk, hogy

$$T_{A'B'C'\triangle} = \frac{1}{2} \overline{A'B'} h(A'B'C').$$

A két egyenlőtlenséget egybevetve azonnal adódik a kívánt állítás.

Duális feladatpárok általában

A fentiekben egy minimalizálási és egy maximalizálási feladatból álló párt láttunk. Összefoglaló néven mindkettő optimalizálási feladat. Egy optimalizálási feladat mindig valamilyen matematikai objektumokra vonatkozik. Ezek az 1. feladat esetében pontok, a 2. feladatnál háromszögek voltak. Az optimalizálási feladat két részből áll: egyrészt feltételekből, amelyeket a feladatban szereplő objektumoknak ki kell elégíteni, másrészt egy célfüggvényből, amely értékeli az objektumokat. A feladat abban áll, hogy a feltételeket kielégítő objektumok közül a célfüggvény szerinti legjobbat találjuk meg, ha ilyen egyáltalán létezik, és legalább egyet, ha több legjobb is létezik. Az utóbbi esetben természetesen mindegyik legjobbhoz ugyanaz a célfüggvényérték tartozik. A feltételeket kielégítő objektumokat *megengedett megoldásoknak*, a legjobbakat pedig *optimális megoldásoknak* nevezzük. Az 1. feladat esetén a megengedett megoldások azok a pontok voltak, amelyek az $ABC\triangle$ -gel egy síkban fekszenek, a 2. feladatban pedig azok a háromszögek, amelyek szabályosak, és oldalegyenesaik átmennek az A , B , C pontokon. Az optimális megoldás az 1. feladat esetén az a pont, amelynek az össztávolsága az A , B , C pontoktól a legkisebb, a 2. feladatban pedig az a háromszög, amelynek magassága a legnagyobb.

Első tételünk azt mondta ki, hogy a minimalizálási feladat bármely megengedett megoldásához tartozó ezen feladatbeli célfüggvényérték legalább akkora, mint a maximalizálási feladat bármely megengedett megoldásához tartozó célfüggvényérték az utóbbi feladatban. Ha egy maximalizálási-minimalizálási feladatpárra egy ilyen állítás teljesül, akkor a maximalizálási feladatot *primál*, feladatnak, a minimalizálási feladatot pedig a *duálisának* mondjuk, a tételt pedig *gyenge dualitási tételnek* nevezzük. Innen természetesen azonnal következik, hogy a minimalizálási feladat célfüggvénye legalább akkora, mint a maximalizálási feladaté. *Erős dualitási tételről* akkor beszélünk, ha azt is sikerül bebizonyítani, hogy az optimális célfüggvényértékek egyenlők. Esetünkben ez volt a 2. tétel. Ha egy feladatpárra csak a gyenge dualitási tétel igaz, de az erős nem, azaz van olyan eset, amikor a minimalizálási feladat célfüggvénye határozottan nagyobb, mint a maximalizálási feladaté, akkor *dualitási gyepűről* beszélünk. Az alábbiakban mindkettőre látunk példát.

A lineáris programozás esete

Egy vándorköszörűs járja az utcákat, ahol munkája akad, ott megáll és elvégzi azt. Így óránként 200 forintos keresetre tesz szert átlagosan, meglehetősen nagy biztonsággal. Egyszer odamegy hozzá egy ember, és azt mondja, hogy bérbe veszi a köszörűt. Alkudozni kezdenek a bérleti díjon. A köszörűsnek nyilván nem éri meg kevesebért kiadni a szerszámát, mint 200Ft óránként, hiszen akkor jövedelme csökkenne. 200 forintnál többért természetesen megéri neki, hiszen úgy még több jövedelemre tesz szert, mint eddig. De még 200 forintért is megéri, hiszen a jövedelme akkor nem nő, hanem ugyanannyi marad, de magának nem kell dolgoznia. A bérlő viszont minél olcsóbban szeretné a köszörűt bérbevenni. Azt nem tudjuk, hogy milyen módszerrel akarja a szerszámot felhasználni, de bárhogy is tegye, a tényleges jövedelme, feltéve, hogy egyéb kiadása nincs, a bevétel és a bérleti díj különbsége lesz. Csak akkor tud valódi haszonra szert tenni, ha ügyesebb, mint a köszörűsünk, és többet keres óránként 200 forintnál. Azt látjuk tehát,

hogy a 200Ft-os bérleti díj az, amin az üzlet megkötötték, ha megkötötték, mert a bérlő viszont lealkudhatja ennyire az árat, a közsörösnek viszont legalább ennyit kell kérnie, de ennyiért még mindig megéri bérbeadni a szerszámot.

Nézzük meg a bérbeadás kérdését most egy bonyolultabb helyzetben. Egy gyár optimális gyártási tervét kell meghatározni egy bizonyos időszakra. Tegyük fel, hogy a gyárban összesen m gép van. Ismert a gyár ezen gépeinek kapacitása az adott időszakban, pontosabban szólva az az időtartam, amennyit legfeljebb dolgozhatnak. Ez gépenként különböző lehet, mert egyes gépeket különböző ideig kell karbantartani, hogy a meghibásodást megelőzzék, más gépeknek a személyzete szabadságra megy, stb. Jelölje az $1, 2, \dots, m$ gépek kapacitását $b_1, b_2, \dots, b_m$. Tegyük fel továbbá, hogy a gyárban n terméket állítanak elő. A gépek és a termékek kapcsolatát az fejezi ki, hogy egy termék egy egységének gyártása az egyes gépeken mennyi ideig tart. Az $1, 2, \dots, n$ termékek esetén jelölje $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ azt az időtartamot, amit egységnyi termék gyártása az első gépen igényel. A második gép esetében ugyanezeket a mennyiségeket jelölje $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}$, és így tovább, az m -edik gép esetén legyenek ezek az időtartamok $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$. Végezetül feltesszük, hogy ismert, hogy az $1, 2, \dots, n$ termékek egy egységén mennyi a haszon, melyet rendre $c_1, c_2, \dots, c_n$ jelöl. Feladatunk meghatározni, hogy mit gyártson az üzem úgy, hogy minden gép el tudja látni a rá váró feladatokat, azaz a legyártandó termékek ne kívánjanak több időt tölteni rajta összesen, mint a kapacitása az adott időszakban, és a vállalat haszna maximális legyen. Az egyes termékekből gyártandó, egyelőre még ismeretlen, mennyiségek legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ez azt jelenti például, hogy az első termékből legyártandó teljes mennyiség a harmadik gépen $a_{31}x_1$ időt fog eltölteni. Ha a harmadik gépre az összes ilyen mennyiséget összegezzük, akkor kapjuk meg, hogy a termelési terv szerint a harmadik gépnek mennyit kellene dolgoznia, és ez nem lehet több, mint a gép kapacitása. Természetesen ennek nemcsak a harmadik gépre kell teljesülnie, hanem valamennyi gépre. Így a következő feltételekhez jutunk:

$$(5) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

A változók értéke negatív nem lehet, mert ez azt jelentené, hogy valamelyik terméket nem gyártjuk, hanem vásároljuk. Ezt formálisan kifejezve kapjuk, hogy

$$(6) \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Mivel a második termék egy egységén c_2 a nyereségünk, ezért, ha a gyártott mennyiség x_2 , akkor ezen a terméken a nyereség c_2x_2 lesz, a teljes nyereség pedig az ilyen tagok összege. Tehát a célfüggvényünk

$$(7) \quad \max (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$$

lesz.

Az a feladat, amely az (5) és (6) feltételek mellett a (7) célfüggvény optimalizálását jelenti, egy lineáris programozási probléma.

Valaki ajánlatot tesz a gyár tulajdonosának, hogy bérbe veszi az üzemet. Hogy létrejön-e az üzlet, még nem tudjuk, de egy dolog biztos: a tulajdonos vagy minden gépet bérbe ad vagy egyet sem. Az alku most akörül folyik, hogy az egyes gépek bérleti díja mennyi legyen. Tegyük fel, hogy az egyelőre még ismeretlen bérleti díjak az $1, 2, \dots, m$ gépek esetén időegységenként $y_1, y_2, \dots, y_m$.

A tulajdonosnak akkor éri meg bérbe adni az üzemet, ha olyan bérleti díjakat kap, hogy ezzel jobban jár, mintha akármelyik termékét gyártaná. Nézzük például az első terméket. Ennek egy egységén c_1 a haszon, és ennek legyártásához $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ egységnyi időt használ fel, melyekért rendre $a_{11}y_1, a_{21}y_2, \dots, a_{m1}y_m$ bérleti díjakat kap. Tehát az utóbbiak összegének legalább akkorának kell lennie, mint c_1 . Hasonló igaz a többi gépre is. Innen az

$$(8) \quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \dots, a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

feltételeket kapjuk. A változók most sem lehetnek negatívak, hiszen ez azt jelentené, hogy valamelyik gép kölcsönzéséért nemhogy nem kap a tulajdonos pénzt, hanem egyenesen neki kell fizetnie:

$$(9) \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0.$$

(8) és (9) a bérbeadás feltétele. A bérlő nem tud a maga szempontjából jobb díjat elérni, mintha ezen feltételek mellett minimalizálja az összdíjat, azaz megkeresi a

$$(10) \quad \min (b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m)$$

célfüggvény optimális értékét, tehát neki akkor éri meg bérbevenni a gyárat, ha azt olyan ügyesen tudja felhasználni, hogy ennél nagyobb hasznot tud elérni.

A (8)–(10) feladat ismét egy lineáris programozási feladat. Ezt nevezzük az (5)–(7) feladat *duáljának*. Magának az (5)–(7) problémának *primál* feladat a neve. Vegyük szemügyre a két feladatot formálisan. Az (5) egyenlőtlenségrendszer baloldán az együtthatókat soronként felírva az alábbi, úgynevezett mátrixot kapjuk:

$$(a_{11} a_{12} \dots a_{1n} a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \dots a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn}). \quad (11)$$

Ebből úgy kapjuk meg a (8) feltételrendszer baloldalának mátrixát, hogy tükrözzük a főátlóra, azaz a bal felső sarokból induló azon „vonala”, amely azokból az együtthatókból áll, melyek két indexe egyenlő:

$$(a_{11}a_{21}\dots a_{m1}a_{12}a_{22}\dots a_{m2}\dots a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn}).(12)$$

Ami a primál feladatban a célfüggvény volt, az a duáljában az egyenlőtlenségek jobboldala és viszont. Amikor az (5)–(7) feladatot bevezettük, akkor az a_{ij} együttható jelentése az volt, hogy a j termék egy egysége mennyi időt tölt az i gépen. Természetes volna tehát azt gondolni, hogy az ilyen együtthatók nem lehetnek negatívak. Hasonló vonatkozik a b_i , c_j mennyiségekre is, hiszen például mi értelme volna egy olyan terméket gyártani, amin negatív nyereség, magyarul veszteség keletkezik. Mi azonban most eltekintünk ezektől a megfontolásoktól, és megengedjük, hogy a feladatokban szereplő mennyiségek tetszőleges valós számok legyenek. Még ebben az esetben is igaz azonban mind a gyenge, mind az erős dualitási tétel:

3. tétel: Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek kielégítik az (5) és (6) feltételeket, hasonlóképpen az $y_1, y_2, \dots, y_m$ értékek pedig a (8) és (9) egyenlőtlenségeket. Ekkor

$$(13) \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \leq b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m.$$

Bizonyítás: Mivel az $y_1, y_2, \dots, y_m$ nem lehetnek negatívak, ezért szabad velük az (5) egyenlőtlenségeket rendre beszorozni, majd az így kapott egyenlőtlenségeket összeadni. Így azt kapjuk, hogy

$$(14) \quad y_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + y_m(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j y_i \leq b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m.$$

Ugyanígy beszorozhatjuk a (8) egyenlőtlenségeket rendre a $x_1, x_2, \dots, x_n$ mennyiségekkel és a keletkező egyenlőtlenségeket összegezzük:

$$(15) \quad x_1(a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m) + \dots + x_n(a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j y_i \geq c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Innen a kívánt egyenlőtlenség azért következik, mivel (14) és (15) baloldala megegyezik.

Köztudott¹¹. pl.: Prékopa András: Lineáris programozás, KÖMAL, 1998/1. sz., hogy egy lineáris programozási feladat három osztályba eshet: (i) egyáltalán nincs megengedett megoldása, (ii) van megengedett megoldása, de a célfüggvénye nemkorlátos, azaz ha $\mathbf{x}$ jelöli az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékekből álló n -est, akkor létezik megengedett megoldásoknak egy olyan $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots\}$ végtelen sorozata, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j x_j^k = \infty$, (iii) a feladatnak van optimális megoldása.

A gyenge dualitási tételből következik, hogy amennyiben a primál feladat nemkorlátos, akkor a duál feladatnak nem lehet megengedett megoldása. Ha ugyanis volna, akkor a célfüggvény ehhez tartozó értéke köteles volna legalább akkora lenni, mint az előbb említett határértékbeli sorozat valamennyi tagja, az pedig lehetetlen. Az erős dualitási tétel csak a (iii) esetre vonatkozhat, és a következőt állítja:

4. tétel: Ha a primál feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális megoldása a duál feladatnak is, és a két feladat optimális célfüggvényértékei egyenlők.

A tétel bizonyítása túllépi a jelen dolgozat kereteit, ezért elhagyjuk.

A kritikus út módszere

A lineáris programozás dualitási tételeinek nagyon sok fontos speciális esete van. Ezek közül több anélkül bizonyítható, hogy hivatkozni kellene a lineáris programozásra. Egy ilyen, építő vállalatok, nagy berendezéseket (pl. hajó, vonat, daru) gyártó üzemek napi gyakorlatában használt feladatról lesz szó.

Egy ház építését vesszük példának. Ez számos különböző tevékenységből áll. Ezek közül egyeseknek meg kell előzni másokat. Nyilvánvaló, hogy az alapok kiásása megelőzi például a falak felhúzását, a vízvezetékek szerelését. A tevékenységek halmazát jelölje V . Ha a és b két tevékenység, azaz $a, b \in V$, akkor három eset lehetséges: (i) az a tevékenységnek már be kell fejeződnie, amikor a b tevékenységhez hozzákezdünk, másképpen kifejezve a megelőzi b -t, (ii) az a és b tevékenység nincs hatással egymásra, (iii) b megelőzi a -t.

Persze például az alapok kiásása és a vízvezeték szerelése között számos tevékenység van, amit szintén el kell végezni. Azt mondjuk, hogy az a tevékenység közvetlenül megelőzi a b -t, ha nincsen olyan c tevékenység, amit a megelőz, és ami viszont megelőzi b -t. Jelölje N azon rendezett (a, b) párok halmazát, ahol a közvetlenül megelőzi b -t. Ekkor a az előzmény, b az „utózmány”. Célunk az, hogy a ház a lehető legrövidebb idő alatt elkészüljön. Ehhez természetesen ismerni kell az egyes tevékenységek elvégzéséhez szükséges időt, amit az a tevékenység esetén c_a jelöl.

1. példa: Különösen családi ház építésénél fordul elő, hogy az egész ház elkészítését részfeladatokra bontják fel, és a leendő tulajdonos mindig azt a már elvégezhető részfeladatot csináltatja meg, amire pénze van. Tekintsük most egy ilyen részfeladatot, nevezetesen a gáz bevezetését az utca alatt található csőből egy kisebb átmérőjű, föld alatt vezetett csővön keresztül a házba. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez a részfeladat mindössze a következő tevékenységekből áll: előkészítés (s), a cső elhelyezéséhez szükséges árok kiásása (a), a cső szerelése (c), szigetelés (g), a cső leeresztése az árokba (l), a vezeték bekötése (k), a vezeték próbája (p), az árok befedése (b). Zárójelben mindenütt az a betű áll, amivel az alábbiakban az adott tevékenységre hivatkozunk. A tevékenységek elvégzéséhez szükséges időket, az egyes tevékenységek közvetlen előzményeit és az egyes tevékenységek megkezdésének ütemezését az alábbi táblázat foglalja össze. A tevékenységek ütemezését alább elemezzük.

tevékenység	elvégzés ideje	előzmény	kezdési időpontja	befejezés időpontja
s	1	—	0	1
a	10	s	1	11
c	3	s	1	4
g	4	c	4	8
l	2	a, g	11	13
k	1	l	13	14
p	1	k	14	15
b	2	p	15	17

Tegyük fel, hogy a tevékenységeket megkezdésük után megszakítás nélkül folyamatosan végezzük. Ütemezzük az s tevékenységet a képzeletbeli 0 időpontra, így s az 1 időpontban fejeződik be. Ennél előbb sem a , sem c nem kezdődhet el. Ha mindkettőt valóban megkezdjük ekkor, úgy a a 11, c a 4 időpontban fejeződik be. A 4 időpontban azonnal hozzáfoghatunk a g tevékenységhez, és az a 8 időpontban ér véget. Ekkor azonban a még hátralévő tevékenységek, azaz l, k, p, b , egyike sem kezdődhet el, mert mindegyiknek van egy-egy olyan előzménye, ami még nem készült el. Ez a helyzet a 11 időpontban változik, amikor a elkészül, és így hozzáfoghatunk l -hez. A továbbiakat a táblázatunk tartalmazza, amiből kiderül, hogy a teljes szereléshez 17 időegység szükséges.

A gyakorlatban egy ház felépítése vagy egy nagyobb szerelési munka sok száz vagy ezer tevékenységből állhat, és ennek a nyomkövetése kézzel már igen nehézkes. Ezért célunk egy olyan módszer kifejlesztése, amely számítógéppel végezhető.

Az $a_1, a_2, \dots, a_k$ tevékenységeket *útnak* mondjuk, ha $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{k-1}, a_k) \in N$. Ha $a_1, a_2, \dots, a_k$ út, és még az is teljesül, hogy $a_1 = a_k$, akkor az utat körnek nevezzük. Első megállapításunk éppen az, hogy tevékenységekből nem lehet kört alkotni. Hiszen ekkor a_2 -t nem lehet elkezdni amíg a_1 -et be nem fejeztük, a_3 -at, amíg a_2 -t be nem fejeztük, és így tovább, egészen addig, hogy $a_k = a_1$ -et sem lehet elkezdni addig, amíg a_{k-1} nincs kész, azaz a tevékenységek körben várnának egymásra, semelyikhez sem lehetne hozzáfogni.

Feltesszük továbbá, hogy létezik egy s kezdeti tevékenység, egy első kapavágás, aminek minden más tevékenységet meg kell előznie, és egy t befejező tevékenység, a kulcsátadás, aminek minden más tevékenységet követnie kell.

Ütemezni fogjuk a tevékenységek megkezdését. Az s kezdeti tevékenységet a képzeletbeli 0 időpontra tesszük. Általában az a tevékenység megkezdésének időpontját $\mu(a)$ jelöli. Ha a közvetlenül megelőzi b -t, akkor b megkezdését csak olyan időpontra lehet ütemezni a megkezdéséhez viszonyítva, hogy legyen elegendő idő a teljes elvégzésére. Így az alábbi feltételeket kapjuk:

$$(16) \quad \mu(s) = 0$$

$$(17) \quad \text{minden } (a, b) \in N \text{ esetén } \mu(a) + c_a \leq \mu(b).$$

Amikor a t tevékenységhez hozzáfogunk a $\mu(t)$ időpontban, akkor már minden más tevékenységnek be kellett fejeződnie. Tehát a ház a kulcsátadás befejezésével, a $\mu(t) + c_t$ időpontban ér véget. Ez az érték nem más, mint az úgynevezett *teljes átfutási idő*, vagyis az az idő, ami az építés megkezdésétől annak teljes befejezéséig eltelik. Célunk tehát ennek minimalizálása. Így a célfüggvény

$$(18) \quad \min \mu(t) + c_t$$

lesz. A c_t érték konstans, ezért elhagyható volna, hiszen az optimális megoldást nem befolyásolja, de a későbbiekben szükségünk lesz rá. Most egy minimalizálási feladatot fogalmaztunk meg, ami az eddigiek szerint a duális feladat. Meg kell adni tehát a primál feladatot is.

Tegyük fel, hogy P egy, a fenti értelemben vett út, amely az $a_1, a_2, \dots, a_k$ tevékenységekből áll. A P út *hosszának* a $\gamma(P) = c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_k}$ mennyiséget nevezzük. A primál feladat a leghosszabb s -ből t -be vezető út megkeresése. Formálisan

$$(19) \quad \max \gamma(P) \quad P = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ út } s = a_1 \text{ és } t = a_k.$$

5. tétel: Legyen μ egy tetszőleges ütemezés, amely eleget tesz a (16)–(17) feltételeknek, $P = \{s = a_1, a_2, \dots, a_k = t\}$ pedig egy s -ből t -be vezető út. Ekkor

$$(20) \quad \gamma(P) \leq \mu(t) + c_t.$$

Bizonyítás: Mivel $a_1 = s$, ezért $\mu(a_1) = 0$. Így a (17) feltételből következik, hogy $\mu(a_2) \geq c_{a_1}$, hiszen a_1 megelőzi a_2 -t. Hasonlóképpen a_2 megelőzi a_3 -at, ezért $\mu(a_3) \geq \mu(a_2) + c_{a_2} \geq c_{a_1} + c_{a_2}$. A gondolatmenetet így folytatva kapjuk, hogy $\mu(t) = \mu(a_k) \geq c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_{k-1}}$. Itt mindkét oldalhoz hozzáadva a c_t mennyiséget, azonnal adódik a kívánt állítás.

Ez tehát a gyenge dualitási tétel. Az erős dualitási tétel bizonyítása azonnal megadja azt az eljárást, amivel az optimális ütemezést meg lehet határozni.

6. tétel: Létezik egy olyan $\bar{P}$ út s -ből t -be és egy $\bar{\mu}$ ütemezés, hogy $\gamma(\bar{P}) = \bar{\mu}(t) + c_t$.

Bizonyítás: Legyen μ egy tetszőleges ütemezés. Azt mondjuk, hogy az $(a, b) \in N$ pár a μ ütemezés szerint *kritikus*, ha $\mu(b) = \mu(a) + c_a$. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \dots, a_k$ a tevékenységeknek egy olyan sorozata, hogy az $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{k-1}, a_k)$ párok mind kritikusak. Ezért

$$(21) \quad \mu(a_k) = \mu(a_{k-1}) + c_{a_{k-1}} = \mu(a_{k-2}) + c_{a_{k-2}} + c_{a_{k-1}} = \dots = \mu(a_1) + c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_{k-1}}.$$

Az $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ utat egy a_1 -ből a_k -ba vezető *kritikus útnak* nevezzük.

Megadunk egy módszert, ami lépésenként szerkeszti meg az optimális $\bar{\mu}$ ütemezést. Az eljárás feltételezi, hogy létezik a tevékenységeknek egy olyan S halmaza, amelynek az s kezdeti tevékenység eleme, és S minden a elemére teljesül, hogy létezik egy olyan s -ből a -ba vezető út, hogy az ebben az útban szereplő összes tevékenység S eleme, és ez az út egyben $\bar{\mu}$ szerint kritikus. A módszer minden egyes lépése kibővíti az S halmazt egy további tevékenységgel.

Kezdetben az S halmaz álljon egyedül az s kezdeti tevékenységből, és (16) szerint legyen $\bar{\mu}(s) = 0$. Ekkor az S halmazra a mondott követelmények teljesülnek. Jelölje T most azokat a tevékenységeket, amelyek nem tartoznak bele az S halmazba. Azt állítjuk, hogy a T -beli tevékenységek között van olyan, amelynek minden előzménye az S halmazban található. Ha ugyanis ez nem igaz, akkor minden T -beli b tevékenységnek létezik egy T -beli a előzménye. Válasszunk egy tetszőleges T -beli b_0 tevékenységet. Tehát ennek van egy T -beli b_1 előzménye. Hasonlóképpen az utóbbinak van egy T -beli b_2 előzménye, és így folytathatjuk a sort a végtelenségig. Mivel azonban csak véges sok tevékenység van a T halmazban, ezért ebben a sorozatban legalább egy tevékenység ismételtten fellép. Ez azonban azt jelenti, hogy a fenti értelemben létezik egy kör, ami ellentmondás.

Legyen most már $b \in T$ az a tevékenység, amelynek minden előzménye az S halmazban található. Jelölje E ezen előzmények halmazát. Legyen

$$(22) \quad \bar{\mu}(b) = \max \{ \bar{\mu}(a) + c_a \mid a \in E \}.$$

Legyen $\bar{a}$ egy olyan tevékenység, amire a (22) egyenlet jobboldalán maximumot kapunk. Ekkor $\bar{\mu}(b) = \bar{\mu}(\bar{a}) + c_{\bar{a}}$, azaz az $(\bar{a}, b)$ pár kritikus. Továbbá létezik s -ből $\bar{a}$ -ba vezető kritikus út. Legyen ez $s = a_1, a_2, \dots, a_k = \bar{a}$. Ekkor $s = a_1, a_2, \dots, a_k = \bar{a}$, b egy s -ből b -be vezető kritikus út. (21) szerint

$$(23) \quad \bar{\mu}(b) = \bar{\mu}(s) + c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_k} = c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_k}.$$

vagyis a b tevékenységet arra az időpontra ütemeztük, amely megegyezik az s -ből a b -be vezető kritikus út hosszával.

Mindezen műveletek elvégzése után a b tevékenység a T halmazból átkerül az S halmazba. Ez az eljárás nem folytatható akármeddig, mert elfognak az S halmazon kívüli tevékenységek, azaz végül maga a t befejező tevékenység is az S halmazba fog tartozni. Ekkor $\bar{\mu}(t)$ az s -ből t -be vezető kritikus út hossza lesz tehát, ami ekvivalens az állítással.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 1. példa számítási módszere azonos a bizonyításban közölt módszerrel. Egyes tevékenységek esetleg később is kezdhetők a számítottnál anélkül, hogy az átfutási idő meghosszabodna. Ilyen volt a példában a c tevékenység. De evvel a módszerrel mindig a lehetséges legkorábbi kezdési időket kapjuk meg. A lehetséges legkésőbbi kezdési időket, amikor az átfutási idő még mindig minimális, akkor kapjuk, ha a módszert a befejező tevékenységből visszafelé haladva fordított irányban végezzük el.

A Lagrange duál feladat

Bonyolultabb problémák esetén egy primál feladathoz több különböző duális feladatot is be lehet vezetni. Az egyik leggyakrabban használt típust nevezik Lagrange duál feladatnak.

Ha a primál feladatot valamilyen oknál fogva nehéz megoldani, viszont a duál feladatot magát megoldani vagy egy megengedett megoldását megtalálni könnyű, akkor a duál feladat bevezetésével azt nyerjük, hogy kapunk egy könnyen számítható felső korlátot a primál feladat optimális célfüggvényértékére. Éppen ez a helyzet a hátizsák feladat²A hátizsák feladatot tárgyalja a "Mit tegyünk a hátizsákba, hogyan váltsunk fel pénzt?" c. cikk a KÖMAL 1996/7. és 8. számában. esetében. Legyen $n, b, a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ pozitív egész. Ekkor a hátizsák feladat

$$\max c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \text{ vagy } 1. (24)$$

Legyen

λ egy tetszőleges, rögzített nemnegatív valós szám. Tekintsük a

$$\max(c_1 - \lambda a_1)x_1 + (c_2 - \lambda a_2)x_2 + \dots + (c_n - \lambda a_n)x_n + \lambda b x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \text{ vagy } 1. (25)$$

feladatot. Az utóbbi feladat optimális célfüggvényértéke mindig legalább akkora, mint a hátizsák feladaté, ugyanis

$$\begin{aligned} & (c_1 - \lambda a_1)x_1 + (c_2 - \lambda a_2)x_2 + \dots + (c_n - \lambda a_n)x_n + \lambda b = \\ & = (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) + \lambda(b - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n). \end{aligned}$$

Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek kielégítik a hátizsák feladat feltételeit, akkor itt az egyenlőség jobboldalának második tagja két nemnegatív szám szorzata, tehát a teljes kifejezés legalább akkora, mint $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$, vagyis a hátizsák feladat célfüggvényének értéke az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek mellett.

A (25) feladatot nagyon egyszerű megoldani, mivel a változók nincsenek közvetlen hatással egymásra, ezért mindegyik értéke úgy választható meg a többitől függetlenül, hogy az a célfüggvény szempontjából a lehető legjobb legyen, vagyis az optimális megoldást a következő képlet adja:

$$\bar{x}_j = 0$$

$$\text{ha } c_j - \lambda a_j < 0 \text{ vagy } 1 \text{ ha } c_j - \lambda a_j = 0 \text{ ha } c_j - \lambda a_j > 0 \quad (26)$$

Ez vezet oda, hogy minden esetben isrdemes lehet valamely primál feladathelyett a (25) feladatot megfelelő változattal megoldani. Most ezt meg...

Legyen m és n pozitív egész. Az f és $g_1, g_2, \dots, g_m$ legyenek az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók valós függvényei. Az S halmaz elemei legyenek rendezett szám n -esek. Végül legyen $b_1, b_2, \dots, b_m$ rögzített valós szám. Primál feladatunk a következő:

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 \dots g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S. (27)$$

Mind a lineáris programozási, mind a hátizsák feladat szerkezete beleillik ebbe az általános keretbe. A lineáris programozási feladat esetén az S halmaz az összes nemnegatív komponensekből álló szám n -es volt. A hátizsák feladatnál pedig az összes olyan, amelyben csak 0 és 1 szerepel. (Az, hogy S rendezett szám n -eseket tartalmaz, a következő példával magyarázható el. Tegyük fel, hogy $n = 3$, és $(1, 2, 3) \in S$ de $(3, 2, 1) \notin S$. Ekkor az $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ értékek a feladat egy megengedett megoldását adják, feltéve, hogy ezeket behelyettesítve az egyenlőtlenségekbe, azokat kielégítik. Azonban az $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ értékek akkor sem adnak megengedett megoldást, ha velük az egyenlőtlenségek teljesülnek, mivel ez az értékrendszer nincs benne az S halmazban, vagyis amikor $x_1 = 3$, akkor nem lehet $x_2 = 2$ és egyidejűleg $x_3 = 1$.)

7. tétel: Legyen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ rögzített valós szám. Ekkor

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S.$$

Megjegyzés: A tétel azt állítja, hogy a primál feladat optimális célfüggvényértéke nem lehet nagyobb, mint egy másik feladaté, amiben az egyetlen feltétel az, hogy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ szám n -es az S halmaz eleme. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ mennyiségek a Lagrange-szorzók, a jobboldali feladat pedig a (rögzített szorzók melletti) Lagrange-feladat.

Bizonyítás: Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek kielégítik a primál feladat feltételeit, akkor a jobboldali feladat célfüggvényének második tagja nem lehet negatív, tehát ennek értéke legalább akkora, mint a primál feladat célfüggvényéé.

Innen a következő, úgynevezett Lagrange-duál feladatot lehet kitézni:

$$\min \max(f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : (x_1, x_2, \dots, x_n) : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0 (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S.)$$

A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ számokat szokás Lagrange-szorzóknak nevezni. A 7. tétel szerint ez a feladat kielégíti azt a követelményt, amit egy duál feladatnak kell. Így a tétel maga nem volt más, mint a gyenge dualitási tétel. A (29) feladat tulajdonképpen az adott módszerrel megkapható legpontosabb, azaz legkisebb, tehát a legjobb felső korlátot határozza meg.

Itt azonban az erős dualitási tétel már nem igaz. Erre példa az alábbi feladat.

$$\max 6x_1 + 5x_2 + 3x_2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ vagy } 1.$$

Mivel mindhrom változók 0-1-esek, így a feladat megoldható a brute force módszerrel. A feladat megoldása a következő:

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$. Innen könnyen látható, hogy az optimális megoldás $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Az ehhez tartozó célfüggvényérték 9. A megfelelő Lagrange-feladat rögzített λ_1 és λ_2 mellett

$$\max(6 - \lambda_1 - \lambda_2)x_1 + (5 - \lambda_1 - \lambda_2)x_2 + (3 - \lambda_1 + \lambda_2)x_3 + 2\lambda_1 + \lambda_2x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ vagy } 1. (30)$$

Itt λ_1 és λ_2 valamilyen nemnegatív számok. Ezért a célfüggvényben x_1 együtthatója biztosan nagyobb, mint x_2 -é. Ezért a Lagrange-feladatnak semmilyen λ_1 és λ_2 sem lehet olyan optimális megoldása, amelyben $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Így összesen hat különböző optimális megoldás lehetséges. Ezeket egyenként végigvizsgálva látható, hogy a feladat célfüggvénye soha nem kisebb, mint 10, azaz fellép a dualitási gyeptű. Mi most a hat lehetséges eset közül azt vizsgáljuk meg, amikor $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Ekkor

$$6 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0, \quad 5 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0, \quad 3 - \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0.$$

Az első egyenlőtlenség következik a másodikból, így ezzel külön nem kell foglalkozni. Az x értékek helyére behelyettesítve 1-et, a célfüggvény értéke $14 - \lambda_1$ lesz. Tehát ahhoz, hogy a célfüggvény a lehető legkisebb legyen, λ_1 -et a lehető legnagyobbra kell választani. Azonban a második és harmadik egyenlőtlenséget összeadva és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy $\lambda_1 \leq 4$. Tehát ebben az esetben a célfüggvény értéke legalább 10. Hasonlóan elemezhető a további öt eset. Mindig azt kapjuk, hogy a Lagrange-feladat optimális célfüggvényértéke legalább 10. Tehát a Lagrange-duál feladaté is, amely nem más, mint megkeresni λ_1 és λ_2 azon értékét, amire a (30) feladat optimális célfüggvényértéke minimális.

Megjegyezzük, hogy egyes esetekben, például amikor a (27) probléma egy lineáris programozási feladat, igaz az erős dualitási tétel is.

Vizvári Béla Eötvös Loránd Tudományegyetem, Operációkutatási Tanszék

