

Rédei László professzor úr emlékére4mm

1. Igazolja, hogy ha $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, akkor

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

2. a) Igazolja, hogy

$$S_n = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \cdots + (3n - 2) \cdot 2^n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}.$$

b) Állítsa elő az

$$S'_n = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^3 + \cdots + (3n - 1) \cdot 2^n$$

összeget n függvényeként.

3. Igazolja, hogy egy háromszög három oldalának hossza, a , b és c pontosan akkor (akkor és csak akkor) három egymást követő eleme egy számtani sorozatnak, ha

$$ac = 6r\rho,$$

ahol r a háromszög köré, ρ a háromszögbe írható kör sugara.

4. Legyenek A, B, C és D a sík (tér) tetszőleges pontjai. Igazolja, hogy

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$;

b) ha $AB \perp CD$ és $AD \perp BC$, akkor $CA \perp BD$.

c) Legyen ABC egy síkbeli háromszög. A b) alapján indokolja, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.