

A múlt havi számunkban közreadtuk az 1999. évi Téli Ankét totó-kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

2, 2, X, 1, X, 2, 2, 2, X, 2, 2, X, 2, 1.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. A $0+999, 1+998, \dots, 499+500$ számpárokban a jegyek összege 27, és mivel 500 ilyen pár van, ezek számjegyeinek összege $50 \cdot 27 = 13\,500$. Az $1000+1999, 1001+1999, \dots, 1499+1500$ párok jegyeinek összege $50 \cdot 29 = 14\,500$, s ha ezekhez hozzáadjuk 2000 számjegyeinek összegét, megkapjuk a 28 002-es végeredményt.

2. A vízszintesen, egyenletes sebességgel mozgó mézescsuporban a buborék v_1 emelkedési sebessége a felhajtóerővel, az pedig a nehézségi gyorsulással arányos: $v_1 = k \cdot g$. Amikor a v_2 sebességű szánkó (és vele együtt a csupor is) lefékeződik, a buborék a vízszintes gyorsulással arányos tehetetlenségi erő hatására vízszintes irányban elmozdul. A buborék pillanatnyi vízszintes sebessége a szánkó pillanatnyi vízszintes gyorsulásával arányos:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -k \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Összegezve a vízszintes elmozdulásokat:

$$\sum \Delta x = -k \sum \Delta v = -k \cdot (-v_2) = \frac{v_1 \cdot v_2}{g}.$$

A megadott számadatokkal ez az elmozdulás 1 mm.

3. Az 5-ös lottónál a nem nyeres esélye (vagyis annak valószínűsége, hogy vagy 0, vagy 1 találatunk legyen):

$$\frac{\binom{85}{5} + 5 \binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \approx 0,977,$$

a nyeres esélye ezek szerint 2,3 %.

A 6-os lottónál a megfelelő valószínűség:

$$\frac{\binom{45}{6} - [\binom{39}{6} + 6 \binom{39}{5}]}{\binom{45}{6}} \approx 0,176,$$

a legalább 2 találat esélye: 17,6 %. Hasonlóan számítható ki, hogy a nyeres (legalább 3 találat) esélye: 2,4 %.

A skandináv lottónál annak valószínűsége, hogy egy húzásnál legalább 2 találatunk legyen:

$$p = \frac{\binom{35}{7} - [\binom{28}{7} + 7 \binom{28}{6}]}{\binom{35}{7}} \approx 0,432.$$

Mivel két húzáson vesz részt minden szelvény, ezek valamelyikén elért 2 találat esélye: $1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2 = 0,677$. A nyeres (2 sorsolás valamelyikén legalább 4 találat) valószínűsége itt 3,6 %.

4. Átlagosan ugyanannyi autó közlekedik keletről nyugatra, mint nyugatról keletre, ezek azonban (az utak, autópályák véges szélessége miatt) különböző távolságra vannak a Föld forgástengelyétől, tehát eredő perdületük nem nulla. Ha valamennyi angliai jármű ellentétes irányban haladna, az impulzusnyomatékuk megváltozna, emiatt a Föld szögsebességének is változnia kellene. A nap hossza igen kicsiny mértékben, de megnőne.

5. Az a pont, ahol a háromszögbe írt kör érinti az AB oldalt, az eredeti helyzetébe kerül vissza, ez a transzformáció fixpontja.

6. A v sebességgel haladó láda egységnyi idő alatt a sebességével arányos számú görgőt hoz mozgásba, s ezek mindegyike a láda sebességével megegyező kerületi sebességre gyorsul fel, összes mozgási energiájuk tehát a sebesség köbével arányos. Belátható, hogy a görgők felgyorsítása közben a súrlódás miatt fejlődő hő ugyanakkora, mint a görgők forgási energiája, tehát a fékezőerő összteljesítménye is a sebesség köbével arányos. Másrészt viszont ez a teljesítmény a fékezőerő és a sebesség szorzataként is felírható, a fékezőerő tehát (a közegellenállási erőhöz hasonlóan) a sebesség négyzetével arányos.

7. Az $a_{mn} = m \cdot n(m^4 - n^4) = m \cdot n(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)$ ($1 \leq n < m$) számok oszthatók 2-vel, 3-mal és 5-tel, másrészt közülük a legkisebb: $a_{21} = 30$, a legnagyobb közös osztójuk tehát 30.

8. A két rúd mágnes különböző nagyságú, *azonos* irányú forgatónyomatékot fejt ki egymásra! (Vajon forgásba jön-e a két mágnesből álló rendszer, ha a megadott elrendezésben egy műanyagvonalzóhoz erősítjük őket és a vonalzót a tömegközéppontjánál csapágyazzuk?)

9. Belátható, hogy ha a dézsában egyetlen pohár úszik, akkor akár a pohárba, akár a dézsába öntünk bele adott mennyiségű vizet, a pohárban levő víz szintje a dézsa aljához viszonyítva mindkét esetben ugyanolyan magasra kerül.

Eszerint sok pohár esetén sem számít, hogy a legkisebb alapterületűbe, valamelyik nagyobb pohárba, vagy akár a dézsába öntjük a vizet, a legkisebb pohár vízszintje ugyanolyan magasságba kerül.

Ha az 1 m^2 alapterületű dézsába öntünk 3 cm^3 vizet, valamennyi pohár és valamennyi vízszint $0,003 \text{ mm}$ -t emelkedik fel. Ha a legkisebb pohárba öntjük a 3 cm^3 -nyi vizet, a benne levő víz szintje ugyanennyit ($0,003 \text{ mm}$ -t) emelkedik, a pohár maga pedig ($1 \text{ cm} - 0,003 \text{ mm}$)-t süllyed. A feltett kérdésre tehát további adatok ismerete *nélkül* is válaszolhatunk.

10. A mérleg a teljes rendszer által a mérlegre kifejtett erőt F mutatja. Ugyanilyen nagyságú (de ellentétes irányú) erőt fejt ki a mérleg is a hordóból, az állványból a kádból és a sörből „álló” rendszerre. A rendszerre ható eredő erő (a függőlegesen lefelé mutató irányt tekintve pozitívnak): $mg - F$. Ha a rendszer tömegközéppontja *áll* (vagy egyenletes sebességgel mozog), akkor $mg - F = 0$, ha viszont a tömegközéppont gyorsulása (lefelé) a , akkor az $mg - F = ma$ mozgásegyenletből $F = mg - ma$. Jelen esetben a rendszer tömegközéppontja (a sör mozgása miatt) lassan süllyed lefelé, de ez a mozgás nem egyenletes, hanem lassuló, hiszen a hordóban levő sörszint csökkenése miatt a kiáramlás sebessége fokozatosan csökken. Eszerint $a < 0$, tehát $F > mg$. (Ugyanez az effektus mérlegre állított homokóránál nem lépne fel, mert a homok lepergési sebessége — a folyamat kezdeti és végső pillanatait leszámítva — nem függ a homokréteg magasságától.)

11. 20 000 ember közül átlagosan 0,95 bizonyul pozitívnak és ténylegesen betegnek, a tévesen betegnek diagnosztizáltak száma pedig átlagosan $0,05 \cdot 19\,999$. Így a betegek és a pozitívok aránya:

$$\frac{0,95}{0,95 + 0,05 \cdot 19\,999} \approx 0,001 = 0,1 \text{ \%}.$$

12. Ha egy homogén henger fedőlapjának közepénél g a nehézségi gyorsulás, akkor onnan egy egységnyi tömegű (kicsiny) testet Δx magasságra emelve $W = g\Delta x$ munkát kell végeznünk. Ez a munka a rendszer gravitációs helyzeti energiájának megváltozásával egyenlő, és úgy is kiszámítható, mintha egy Δx vastag réteget gondolatban levágtunk volna a henger egyik „végéről”, s a henger másik végére helyeztük volna át. Az áthelyezés során a helyzeti energia éppen annyit változik meg, mint amennyi munkát az egész henger δx távolságra történő elmozdításakor végzünk. Ez a munka integrálszámítás segítségével adható meg:

$$W = g_{\text{henger}}\Delta x = 2\pi f \rho \left(R + H - \sqrt{R^2 + H^2} \right) \cdot \Delta x.$$

A fenti képletnek megfelelő g akkor egyezik meg az R sugarú, ρ sűrűségű gömb alakú Föld felszínén mérhető $g = \frac{4}{3}\pi f \rho R$ gyorsulással, ha $H = \frac{4}{3}R$.

Megjegyzés. Vigyázat: a henger gravitációs tere nem számolható úgy, mintha a teljes tömege a tömegközéppontban helyezkedne el. Ha mégis így tennénk, akkor a $H = 3R$ hibás eredményt kapnánk.

13. Az $\left[\frac{x}{2000} \right] = \left[\frac{x}{1999} \right]$ egyenletnek 1 999 000 nemnegatív egész megoldása van.

Legyen $a = 1999$, akkor az

$$\left[\frac{x}{a+1} \right] = \left[\frac{x}{a} \right] = 0$$

egyenletnek $x = 0, 1, \dots, a-1$, tehát a darab megoldása van, az

$$\left[\frac{x}{a+1} \right] = \left[\frac{x}{a} \right] = 1$$

egyenletnek $a+1 \leq x < 2a$, azaz $a-1$ darab megoldása van, s általában az

$$\left[\frac{x}{a+1} \right] = \left[\frac{x}{a} \right] = k$$

egyenletnek egyenletnek $a-k$ megoldása (ha $a > k$). Az összes megoldás száma

$$\sum_{k=0}^a (a-k) = 1 + 2 + \dots + 1999 = 1\,999\,000.$$

13 + 1. John Leech mutatta meg, hogy van olyan tetraéder, amelynek egészek az élei, egész szám a felszíne és egész a térfogata is. Az $a = 148$, $b = 195$, $c = 203$ oldalú háromszög hegyesszögű, és a területe egész (nevezetesen 13 650). Igaz továbbá, hogy ha ABC egy hegyesszögű háromszög, akkor létezik egy olyan tetraéder, melynek minden lapja egybevágó az ABC háromszöggel, és az ilyen tetraéder térfogata

$$V = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{72}},$$

ami most 611 520. (Ez a pótkérdés igazából „lottó-kérdés” volt, itt logikus gondolkodás helyett inkább szerencsés tippelésre volt szükség!)

12. Ha egy homogén henger fedőlapjának közepénél g a nehézségi gyorsulás, akkor onnan egy egységnyi tömeg? (kicsiny) testet Δx magasságra emelve $W = g\Delta x$ munkát kell végeznünk. Ez a munka a rendszer gravitációs helyzeti energiájának megváltozásával egyenlő, és úgy is kiszámítható, mintha egy Δx vastag réteget gondolatban levágtunk volna a henger egyik „végéről”, s a henger másik végére helyeztük volna át. Az áthelyezés során a helyzeti energia éppen annyit változik meg, mint amennyi munkát az egész henger δx távolságra történő elmozdításakor végzünk. Ez a munka integrálszámítás segítségével adható meg:

$$W = g_{\text{henger}} \Delta x = 2\pi f \rho \left(R + H - \sqrt{R^2 + H^2} \right) \cdot \Delta x.$$

A fenti képletnek megfelel g akkor egyezik meg az R sugarú, ρ sűrűségű gömb alakú Föld felszínén mérhető $g = \frac{4}{3}\pi f \rho R$ gyorsulással, ha $H = \frac{4}{3}R$.

Megjegyzés. Vigyázat: a henger gravitációs tere nem számolható úgy, mintha a teljes tömege a tömegközéppontban helyezkedne el. Ha mégis így tennénk, akkor a $H = 3R$ hibás eredményt kapnánk.

13. Az $\left[\frac{x}{2000} \right] = \left[\frac{x}{1999} \right]$ egyenletnek 1 999 000 nemnegatív egész megoldása van. Legyen $a = 1999$, akkor az

$$\left[\frac{x}{a+1} \right] = \left[\frac{x}{a} \right] = 0$$

egyenletnek $x = 0, 1, \dots, a-1$, tehát a darab megoldása van, az

$$\left[\frac{x}{a+1} \right] = \left[\frac{x}{a} \right] = 1$$

egyenletnek $a+1 \leq x < 2a$, azaz $a-1$ darab megoldása van, s általában az

$$\left[\frac{x}{a+1} \right] = \left[\frac{x}{a} \right] = k$$

egyenletnek egyenletnek $a-k$ megoldása (ha $a > k$). Az összes megoldás száma

$$\sum_{k=0}^a (a-k) = 1 + 2 + \dots + 1999 = 1\,999\,000.$$

13 + 1. *John Leech* mutatta meg, hogy van olyan tetraéder, amelynek egészek az élei, egész szám a felszíne és egész a térfogata is. Az $a = 148$, $b = 195$, $c = 203$ oldalú háromszög hegyesszögű, és a területe egész (nevezetesen 13 650). Igaz továbbá, hogy ha ABC egy hegyesszögű háromszög, akkor létezik egy olyan tetraéder, melynek minden lapja egybevágó az ABC háromszöggel, és az ilyen tetraéder térfogata

$$V = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{72}},$$

ami most 611 520. (Ez a pótkérdés igazából „lottó-kérdés” volt, itt logikus gondolkodás helyett inkább szerencsés tippelésre volt szükség!)