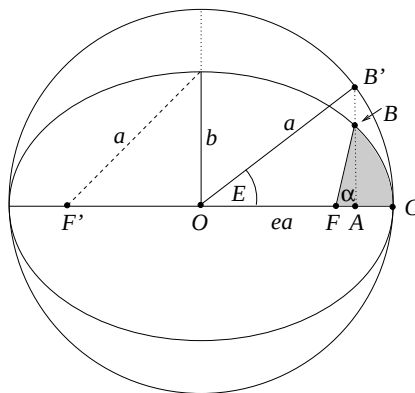


A bolygók – Kepler I. törvénye szerint – olyan ellipszispályán mozognak, melynek egyik (F) fókuszpontjában a Nap található. A bolygó pillanatnyi helyzete pl. az *ábrán* látható α szöggel jellemezhető. A mozgás időbeli leírása, vagyis az α szöghöz tartozó CB ív befutásához szükséges idő megadása (a körpálya speciális esetét leszámítva) általában nem könnyű feladat.



Kepler – még a differenciálszámítás ismerete előtt – levezetett egy olyan összefüggést, melynek segítségével kiszámítható egy tetszőleges ellipszis-ív befutásához szükséges idő. Az egyenlet Kepler II. törvényén, a területi sebesség állandóságán alapszik.

Tekintsünk egy a és b féltengelyű ellipszist, és használjuk az

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

összefüggéseket. (e az ellipszis „*excentricitása*”, kör esetében $e = 0$, parabolává fajuló „ellipsziszre” pedig $e \rightarrow 1$.)

Nagyítsuk meg az ellipszist a kistengelye mentén a/b -szeresére, így egy a sugarú kört kapunk. Jelöljük a B helyen levő bolygónak megfelelő pontot a körön B' -vel, a COB' szöget pedig E -vel. (Ezt a szöget az égi mechanikában *excentrikus anomáliának* nevezik.)

Kepler II. törvénye szerint a BC ív befutásához szükséges t idő úgy aránylik a T keringési időhöz, mint a vezérsugár által súrolt A_{FCB} terület (az ábrán satírozott rész területe) az ellipszis teljes területéhez. Ugyanez az arány a nagyítás után adódó körön is leolvasható:

$$\frac{t}{T} = \frac{A_{FCB'}}{a^2\pi}.$$

Másrészt viszont az $A_{FCB'}$ terület az OCB' körcikk $a^2E/2$ területének és az OFB' háromszög területének különbsége. Mivel az ellipszis középpontjának és a fókuszpontjának távolsága

$$OF = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = a \cdot e,$$

az OFB' háromszög B' csúspontjához tartozó magassága pedig $a \cdot \sin E$, felírhatjuk, hogy

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}ae \cdot a \sin E}{a^2\pi}, \quad \text{ahonnan} \quad t = T \frac{E - e \sin E}{2\pi}.$$

Ez Kepler egyenlete.

Az egyenlet gyakorlati alkalmazhatóságához meg kell határoznunk még a bolygó helyzetét jellemző α szög és az E szög közötti kapcsolatot. Elemi trigonometriai átalakítások segítségével belátható, hogy a kérdéses összefüggés a következő:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Tekintsük ugyanis az FAB háromszöget:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BA}{FA} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot B'A}{FA} = \frac{a \sin E \sqrt{1-e^2}}{a \cos E - ea} = \frac{\operatorname{tg} E \sqrt{1-e^2}}{1 - e \sqrt{1+e^2} E}.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} E = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{E}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}},$$

amelyeket a fentebbi összefüggésbe helyettesítve némi átalakítás után

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}}{1 - \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}}$$

adódik. Jelöljük $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -t n -nel, $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ -t pedig m -mel, akkor a fenti összefüggés így néz ki:

$$\frac{n}{1-n^2} = \frac{m}{1-m^2}, \quad \text{ahonnan} \quad (n-m)(1+nm) = 0.$$

Ez utóbbi viszont csak $n = m$, vagyis

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

fennállása esetén teljesülhet, hiszen nm sosem negatív.

A fenti összefüggés segítségével adott α esetén könnyen kiszámíthatjuk az excentrikus anomáliát (E -t), abból pedig a t időt, így a $t(\alpha)$ függvényt, a bolygó mozgását megadó $\alpha(t)$ függvény inverzét.

Horányi Gábor