**Az elméleti feladatok megoldása** [1]

**1. feladat. a)** A hasáb gördülése közben, az egymást követő becsapódásokkor nagy erők lépnek fel a lejtővel érintkező élek (pl. az *1.1 ábrán* $A$-val jelölt él) mentén. Ezek az erők pillanatszerűen lecsökkentik a hasáb érintés előtti $\omega_i$ szögsebességét a becsapódást közvetlenül követő $\omega_f$ értékre. Észrevehetjük azonban, hogy a hasábra ható erők nem változtatják meg az $A$ pontra számítható perdületet, ami saját- és pályaperdületből áll:

$$I\omega_i + Ma \cdot \frac{1}{2}a\omega_i = I\omega_f + Ma \cdot a\omega_f.$$

Az $I$ tehetetlenségi nyomaték megadott értékének behelyettesítése után azonnal megkapjuk az eredményt:

$$s = \frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{11}{17}.$$

[1] A feladatok szövege múlt havi számunkban olvasható.

*1.1. ábra*

**b)** A test $K$ mozgási energiája az ütközés előtt is és a becsapódást követően is a hasáb egy-egy oldaléle körüli forgásból számítható. A mozgási energiák aránya:

$$r = \frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}I'\omega_f^2}{\frac{1}{2}I'\omega_i^2} = \frac{\omega_f^2}{\omega_i^2} = s^2 = \frac{121}{289}.$$

**c)** A hasáb következő éle akkor érinti a lejtőt, ha energiája elegendő ahhoz, hogy súlypontját „átemelje" pályájának legmagasabb pontján. Az *1.2 ábráról* leolvasható, hogy a súlypont emelkedése $a - a\cos(30° - \theta)$, ahol $\theta$ a lejtő hajlásszöge. Ha az érintés előtti minimális energiát $\delta \cdot Mga$ alakban írjuk fel, akkor a kritikus esetre a következő egyenlet adható:

$$Mga\,[1 - \cos(30° - \theta)] = r\delta \cdot Mga, \qquad \text{amiből} \qquad \delta = \frac{1 - \cos(30° - \theta)}{r}.$$

*1.2. ábra*

**d)** Tegyük fel, hogy a hasáb úgy mozog, hogy az érintés előtti mozgási energiája már felvette az állandósult $K_{i,0} = \kappa \cdot Mga$ értéket. Az állandósult mozgásnak az a feltétele, hogy a becsapódásonként a mozgási energia vesztesége éppen egyenlő legyen az egy-egy lépésre eső helyzeti energia csökkenéssel. Az *1.3 ábra* alapján:

$$Mga \sin\theta = (1-r)\kappa \cdot Mga, \qquad \text{azaz} \qquad \kappa = \frac{\sin\theta}{1-r}.$$

*1.3. ábra*

**e)** Minél kisebb egy lejtő hajlásszöge, annál kisebb egy-egy lépésben a hasáb helyzeti energiájának csökkenése, másrészt annál nagyobb a súlypont emelkedéséből származó „fékező korlát". A kettő egyenlősége (a két előző alkérdés eredményének egybevetése) adja meg az állandósult mozgásra még alkalmas $\theta_0$ minimális hajlásszöget:

$$\frac{\sin\theta_0}{1-r}=\frac{1-\cos(30^\circ-\theta_0)}{r},$$

amiből a kérdéses szögre meglepően kicsiny érték, $\theta_0=6{,}6^\circ$ adódik.

*Megjegyzés.* A feladat *a*) része úgy is megoldható, hogy felírjuk a a becsapódáskor bekövetkező sebesség- és szögsebesség-változásokat a fellépő erők és forgatónyomatékok segítségével. Ezek az erők olyan nagyok, hogy mellettük a hasábra ható nehézségi erő elhanyagolható.

**2. feladat. a)** A jég megolvasztásához szükséges hőt a Föld mélyéből érkező hőáram fedezi: $L_j\varrho_jAd=J_QAt$ ($t=1$ év), amiből az évente megolvadó jégréteg vastagsága: $d\approx 6$ mm.

**b)** A jégtábla alján a nyomás a külső légnyomás ($p_0$) és a jég súlyából származó hidrosztatikai nyomás összege:

$$p_j(x)=p_0+\varrho_jg\,[y_2(x)-y_1(x)]=p_0+\varrho_jgh_0+\varrho_jgx(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha).$$

A jégtábla alján vékony vízréteget képzelhetünk el, ami akkor nem folyik egyik irányba sem, ha a felette lévő jégréteg nyomása megegyezik a víz nyomásával. $x=0$-nál a víz nyomása $p_j(0)=p_0+\varrho_jgh_0$, magasabban pedig a hidrosztatikai nyomásnak megfelelően kisebb:

$$p_v(x)=p_0+\varrho_jgh_0-\varrho_vgx\operatorname{tg}\alpha.$$

A víz és a jég nyomása akkor lesz $x$-től függetlenül egyenlő, ha $\varrho_j(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)=-\varrho_v\operatorname{tg}\alpha$, azaz

$$s=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\varrho_j-\varrho_v}{\varrho_j}=-0{,}091.$$

Egyensúlyi állapotban tehát a jégréteg felső felületének süllyednie kell, ha az alatta lévő talaj emelkedik *(2.1 ábra)*.

Ha a sziklatalaj menetét az $y_1=0{,}8x$ egyenlet írja le, továbbá a jég vastagsága az $x_0=0$ helyen $h_0=2$ km, akkor a jégfelszínt leíró egyenlet: $y_2=2\text{ km}-0{,}073x$ (*2.2 ábra*). A két egyenes az $x_P=2{,}3$ km, $y_P=1{,}8$ km koordinátájú pontban metszi egymást.

*2.1. ábra*

*2.1. ábra*

*2.2. ábra*

*2.2. ábra*

**c)** Mivel a víz sűrűsége nagyobb a jégénél, így olvadáskor a keletkezett víz kisebb térfogatot foglal el, és a jégtábla felszínén (éppen a megolvadt kúp alakú víztömeg felett) fordított kúp alakú bemélyedés jön létre. A behorpadás legnagyobb $h$ mélységét a $b$) alkérdésre adott válasz alapján számíthatjuk ki:

$$h = |r \ \mathrm{tg}\,\beta| = \frac{\Delta\varrho}{\varrho_j} r \ \mathrm{tg}\,\alpha \approx 91 \text{ m}.$$

A felszínen kialakult bemélyedést a *2.3 ábra* mutatja.

*2.3. ábra*

**d)** A jégréteg aljára behatoló forró magma miatt nagy mennyiségű jég olvad meg. A folyamatot három lépésben képzelhetjük el. Először a magma-benyomulás helyén lévő $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$ térfogatú jég olvad meg, és a keletkező víz elfolyik. Második lépésben fordított kúp alakú benyomódás jön létre a jégréteg felszínén, miközben a magma-benyomulás felett keletkező víz folyamatosan elfolyik. Ez a szakasz a nyomás-egyensúly kialakulásáig tart, a horpadás $h_2$ mélységét az előző alkérdésekre adott válaszok alapján számíthatjuk ki:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 \frac{\Delta\varrho}{\varrho_j}.$$

Feltételezhetjük, hogy a magma-benyomulás anyaga még ekkor is igen meleg, tehát a magma további jégmennyiséget olvaszt meg, ami viszont már nem folyik el, hiszen a megolvadása nem befolyásolja a kialakult nyomás-egyensúlyt. A harmadik lépésben elolvadó jég térfogatát is kezelhetjük egy kúp térfogataként: $V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_3$, amelyből a magma-benyomulás felett $h_3' = \frac{\varrho_j}{\varrho_v} h_3$ magasságú „vízkúp" jön létre. A „vízkúp" tovább növeli a felszíni behorpadás mélységét, amit szintén az előző alkérdésekre adott válaszok szerint határozhatunk meg. Az olvadási folyamat végére létrejövő horpadás teljes $h$ mélységét így írhatjuk fel:

$$h = \frac{\Delta\varrho}{\varrho_j}(h_3 + h_3') = \frac{\Delta\varrho}{\varrho_j} \cdot H,$$

amelyből a vízkúp tetőpontjának $H$ magasságát a jégtábla alapjának eredeti szintjéhez képest már könnyen kiszámíthatjuk: $H = 1{,}1$ km. A magma-behatolás $h_1$ magasságát kalorimetrikus egyenlet alapján határozhatjuk meg (a magma belső energiacsökkenése fedezi a jég megolvasztásához szükséges hőt):

$$(L_k + c_k\Delta T)\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 \varrho_k = L_j \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2 + h_3)\varrho_j =$$
$$= L_j \frac{1}{3}\pi r^2 \left[h_1\varrho_j + h_2\Delta\varrho + (H - h_1)\varrho_v\right].$$

A szükséges behelyettesítések és számítások elvégzése után a magma-behatolás magasságára $h_1 = 103$ m adódik. A magma-behatolás és a visszamaradt víztömeg alakját a *2.4 ábra* mutatja. A keletkezett és elfolyt víztömegeket ezek után már igen könnyű meghatározni, hiszen $V_1 + V_2 + V_3$ adja a teljes elolvadt jégtérfogatot, míg $V_1 + V_2$ azt a jégtérfogatot, amiből a megolvadt víz elfolyt. A numerikus számítások szerint a keletkezett teljes víztömeg: $m_t = 2{,}9 \cdot 10^{11}$ kg, míg az elfolyt víz tömege: $m' = 2{,}7 \cdot 10^{10}$ kg.

*2.4. ábra*

*2.4. ábra*

**3. feladat**

**a)** A közös centrumtól távolodó két objektum látszólagos szögsebességét könnyen meghatározhatjuk, ha látószögüket az idő függvényében ábrázoljuk, és a kapott egyenesek meredekségét leolvassuk. Ha 1-es index jelöli a bal oldali, 2-es index pedig a jobb oldali forrást, akkor $\omega_1 = 9{,}54 \cdot 10^{-13}$ rad/s, illetve $\omega_2 = 4{,}88 \cdot 10^{-13}$ rad/s értékekre jutunk. A rádióforrások $v'_\perp$ transzverzális (keresztirányú) sebességét a szögsebesség és az $R = 12{,}5$ kpc $= 3{,}86 \cdot 10^{20}$ m távolság szorzataként számíthatjuk ki: $v'_{1,\perp} = 3{,}68 \cdot 10^8$ m/s $\approx 1{,}23c$, $v'_{2,\perp} = 1{,}88 \cdot 10^8$ m/s $\approx 0{,}63c$, ahol $c$ a fénysebesség.

**b)** Egyszerű számításaink alapján arra a meglepő eredményre jutottunk, mintha a bal oldali objektum *fénynél sebesebben* (!) mozogna. A probléma körültekintőbb tárgyalása érdekében képzeljünk el egy fényforrást, ami $\mathbf{v}$ sebességgel mozog egy tőle távoli $O$ megfigyelő irányához képest $\varphi$ szögben *(3.1 ábra)*. A sebesség nagyságát jelölje $v = \beta c$. A fényforrás távolságát a megfigyelő $R$-nek méri, szögsebességét $\omega$-nak észleli. Tekintsük a forrás mozgását $\Delta t$ ideig, miközben az $A$ pontból az $A'$ pontba jut: $\mathbf{r}_{AA'} = \mathbf{r}_{A'} - \mathbf{r}_A = \mathbf{v}\Delta t$.

*3.1. ábra*

Jelölje $\Delta t'$ az $A$-ból, illetve $A'$-ből induló jelek beérkezésének időbeli különbségét az $O$ pontban. Mivel $A$ és $A'$ távolsága különböző, a fénysebesség pedig véges:

$$\Delta t' = \Delta t + \frac{r_{A'} - r_A}{c}.$$

Kis $\Delta t$ idők esetén $v\Delta t \ll r_A = R$, tehát

$$r_{A'} - r_A \approx -v\Delta t \cos\varphi.$$

Mindezek figyelembe vételével

$$\Delta t' \approx \Delta t(1 - \beta\cos\varphi), \quad (\beta = v/c).$$

Így a forrás $O$-beli látszólagos keresztirányú sebessége

$$v'_\perp = \frac{\Delta x}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t(1-\beta\cos\varphi)} = \frac{c\beta\sin\varphi}{1-\beta\cos\varphi},$$

ahol felhasználtuk, hogy a megfigyelő vonatkoztatási rendszerében a valódi keresztirányú sebesség $v'_\perp = \Delta x/\Delta t = c\beta\sin\varphi$. Az $O$-ban észlelhető szögsebesség:

$$\omega = \frac{v'_\perp}{R} = \frac{c\beta\sin\varphi}{R(1-\beta\cos\varphi)}.$$

**c)** Ha feltételezzük, hogy a két objektum egy egyenes mentén, azonos nagyságú sebességgel távolodik egymástól, akkor a következő összefüggéseket írhatjuk fel a látszólagos szögsebességekre:

$$\omega_1 = \frac{c\beta\sin\varphi}{R(1-\beta\cos\varphi)}, \qquad \omega_2 = \frac{c\beta\sin\varphi}{R(1+\beta\cos\varphi)}.$$

A megadott, illetve mért numerikus értékek segítségével a fenti két kifejezésből egyszerű algebrai átalakításokkal $\varphi$ és $\beta$ értéke kiszámítható: $\varphi = 68{,}8^\circ$, $\beta = 0{,}89$. Megnyugodhatunk tehát, hiszen az észlelt rádióforrások mindössze a fénysebesség 89 %-ával mozognak.

**d)** A látszólagos keresztirányú sebesség akkor lehet nagyobb vagy egyenlő a fénysebességnél, ha a $\beta\sin\varphi \geq 1 - \beta\cos\varphi$ feltétel teljesül, ami a vizsgált esetben fenn is áll. Ez a feltétel a következő alakba írható át:

$$\beta \geq f(\varphi) = \left[\sqrt{2}\sin(\varphi + \pi/4)\right]^{-1}.$$

A $(\beta,\ \varphi)$ síkon az egyenlőség jelöli ki azt a tartományt, amin belül a feltétel teljesül *(3.2 ábra)*.

*3.2. ábra*

*3.2. ábra*

**e)** Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a *b*) alkérdés válaszában megadott

$$v'_\perp = \frac{c\beta \sin\varphi}{1-\beta\cos\varphi}$$

kifejezésnek a fizikailag értelmes szögtartományban adott $\beta$ esetén akkor van maximuma, ha $\varphi_{\max} = \arccos\beta$. Eszerint a látszólagos keresztirányú sebesség végtelenhez tarthat, ha $\beta$ megközelíti az 1-et, ami persze azt is jelenti, hogy $\varphi$ nullához tart, vagyis a mozgó objektum a megfigyelő felé mozog közel fénysebességgel.

**f)** A relativisztikus Doppler-eltolódás egyenleteit kell kezelnünk:

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_0} = \frac{1 \pm \beta \cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

A szög kiejtésével kell $\beta$-t kifejeznünk, amit a két egyenlet összeadásával, majd rendezésével tehetünk meg:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}},$$

tehát a kérdéses szám: $\alpha = 4$. A $c$) alkérdésre adott válasz két egyenletében $\varphi$ és $\beta$ voltak az ismeretlenek, $R$-et más mérésekből meghatározott, adott értéknek vettük. Ha viszont a legutóbbi összefüggésünket harmadik egyenletnek tekintjük, ami közvetlenül megadja $\beta$ értékét, akkor $\varphi$ mellett az $R$ távolság is meghatározható.

**Honyek Gyula**

## A kísérleti feladat megoldása

### I. rész. Mágneses árnyékolás vizsgálata.

A mérésnek ebben a részében a versenyzők feladata az árnyékolást leíró (a feladat szövegében megadott) képletben szereplő $\alpha$ együttható frekvenciafüggésének meghatározása volt. Ehhez különböző frekvenciákon különböző vastagságú aluminium fóliával kellett méréseket végezni. A mérés maga nagyon egyszerű: a rendelkezésre álló digitális műszerekkel a frekvenciát és a mérőtekercsben indukálódott feszültséget lehetett mérni – itt legfeljebb a helyes méréstartomány megválasztására kellett figyelni. A versenyzőknek talán azt volt a legnehezebb eldönteni, hogy a rendelkezésre álló idő alatt hány különböző frekvencián és hány különböző fóliavastagság esetében mérjenek.

A mérési adatok kiértékelése is elég hosszadalmas munka. A megadott képlet alapján egy adott frekvencián

$$e^{-\alpha d} = \frac{B}{B_0} = \frac{U}{U_0}, \qquad \text{azaz} \qquad \ln U = \ln U_0 - \alpha d$$

kifejezést kapjuk, tehát ha $\ln U$-t $d$ függvényében ábrázoljuk, akkor az elmélet szerint a mérési pontoknak a mérés hibahatárán belül egy $-\alpha$ meredekségű egyenesen kell lenniük. Ezt a grafikont minden egyes mért frekvenciánál el kell készíteni, a mérési pontokra egyenest kell illeszteni, az egyenesek meredekségét le kell olvasni. Ezután lehet ábrázolni $\alpha$-t $f$ függvényében.

### II. rész Mágneses fluxus-csatolás vizsgálata.

A feladat második részében a versenyzők a méréssel kapcsolatos elméleti feladatokat is kaptak. Az 1. kérdésben az önindukciós együtthatókat és a csatolási tényezőt megadó összefüggéseket kellett igazolniuk. Az önindukciós együtthatók definiciója közismert, a csatolási tényező képletét pedig a feladat szövegében megadott összefüggésekkel könnyen igazolhatjuk:

$$\varepsilon_B = c\omega N_B(N_B I_B - k N_A I_A) = 0,$$

amiből $k = (N_B I_B)/(N_A I_A)$ adódik.

A definiáló összefüggések alapján könnyen összerakhatóak a mérési kapcsolások:

*4. ábra*

*4. ábra*

*Megjegyzés.* A kapcsolás megtervezésekor érdemes figyelembe venni, hogy a digitális feszültségmérők 1 M$\Omega$-nál nagyobb belső ellenállásukkal „sokkal ideálisabbak", mint az árammérők.

A 2. és 3. kérdésre ehhez hasonlóan, a feladat szövegében megadott összefüggésekbe való behelyettesítéssel és rendezéssel lehet válaszolni. Ezt az olvasóra bízzuk. A keresett összefüggések:

$$I_p = I_A = \frac{\varepsilon_A}{\omega L_A(1-k^2)}, \qquad \frac{U_A}{U_B} = \frac{N_A^2 - kN_AN_B}{N_B^2 - kN_AN_B}.$$

A 4. és az 5. feladat két korábbi feltevés számszerű igazolása volt. Az önindukciós együttható menetszámtól való függését három eredmény ($L_A$, $L_B$ és $L_{A+B}$) összevetésével igazolhatjuk. Az $L/N^2$ érték mindhárom esetben hibahatáron belül megegyezik. A primer tekercs 2–3 $\Omega$-os ohmos ellenállása pedig valóban elhanyagolható a tekercs $\omega L(1-k^2)$ induktív ellenállásának kb. 100 $\Omega$-os értékéhez képest.

A 6. feladat a ferritmag relatív permeabilitásának meghatározása volt. A ferritmagon vékony papírlapok segítségével két rést lehetett létrehozni. Az Ampère-féle gerjesztési törvényt alkalmazva mindkét esetre:

$$NI_1 = \oint \frac{1}{\mu} B dl = \frac{2l}{\mu_0\mu_r} B_1 \qquad \text{a rés nélküli esetben,}$$

illetve

$$NI_2 = \oint \frac{1}{\mu} B dl = \left(\frac{2l}{\mu_0\mu_r} + \frac{2d}{\mu_0}\right) B_2 \qquad \text{a rést tartalmazó mag esetére.}$$

Felhasználva, hogy $U_1 = \omega N B_1 A$, illetve $U_2 = \omega N B_2 A$ és hogy $L_1 = U_1/\omega I_1$, illetve $L_2 = U_2/\omega I_2$ azt kapjuk, hogy

$$\mu_r = \frac{l}{d}\left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right),$$

ahol $l$ a ferritmag középvonalának hossza, $d$ pedig a papír vastagsága. $\mu_r$ numerikus értékének meghatározásához a geometriai adatokon kívül már csak a rést tartalmazó vasmagon lévő tekercs önindukciós együtthatóját kellett megmérni.

**Vankó Péter**