

**1. feladat.** *Szabályos hatszög alapú hasáb gördülése*

*1.1. ábra. Egy szabályos hatszög keresztmetszetű hasáb*

---

<sup>1</sup> A feladatok megoldását következő számunkban közöljük. Addig olvasóink (elsősorban a versenyekre készülők) kipróbálhatják tudásukat. Az olimpián 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére, és a megoldásukat egy ún. válaszlapon adták be.

Tekintsünk egy hosszú, merev, szabályos hatszög alapú egyenes hasábot, amilyen pl. egy ceruza (*1.1 ábra*). A homogén sűrűségű hasáb tömege  $M$ . A szabályos hatszög mindegyik oldaléle  $a$ . A hatszögű hasáb középtengelyére vonatkoztatott  $I$  tehetetlenségi nyomatéka:

$$(1.1) \quad I = \frac{5}{12}Ma^2.$$

A hasáb egy hosszanti élére vonatkoztatott  $I'$  tehetetlenségi nyomatéka:

$$(1.2) \quad I' = \frac{17}{12}Ma^2.$$

*1.2. ábra. Szabályos hatszög keresztmetszetű hasáb a lejtőn*

**a)** (3,5 pont) A hasáb kezdetben nyugalomban van, tengelye vízszintesen fekszik egy sík lejtőn, aminek a vízszintessel képezett  $\theta$  hajlásszöge kicsi (1.2 ábra). Tételezd fel, hogy a henger oldallapjai enyhén konkávak, így a hasáb csak oldalélei mentén érinti a lejtőt. (Ennek a csekély behajlásnak a tehetetlenségi nyomatékra gyakorolt hatását elhanyagolhatjuk.) A hasábot mozdítsuk ki nyugalmi állapotából, így az egyenetlen mozgással legurul a lejtőn. Feltételezzük, hogy a súrlódás bármilyen csúszást megakadályoz, valamint hogy a hasáb mindvégig érintkezik a lejtővel. Mielőtt egy

adott él éppen megérinti a lejtőt, a szögsebesség legyen  $\omega_i$ , közvetlenül az él és a lejtő érintkezése után pedig  $\omega_f$ . Mutasd meg, hogy

$$(1.3) \quad \omega_f = s \cdot \omega_i,$$

és írd az  $s$  együttható értékét a válaszlap megfelelő rovatába!

**b) (1 pont)** A hasáb mozgási energiája közvetlenül az érintés előtt  $K_i$  és közvetlenül utána  $K_f$ . Mutasd meg, hogy

$$(1.4) \quad K_f = r \cdot K_i,$$

és az  $r$  együttható értékét írd a válaszlap megfelelő rovatába!

**c) (1,5 pont)** Ahhoz, hogy egy következő él is érintse a lejtőt,  $K_i$ -nek nagyobbnak kell lennie egy minimális  $K_{i,\min}$  értéknél. Ez utóbbi így írható:

$$(1.5) \quad K_{i,\min} = \delta \cdot Mga.$$

Itt  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  a nehézségi gyorsulás. Határozd meg  $\delta$ -t a lejtő  $\theta$  hajlásszögének és az  $r$  együtthatónak a függvényeként.

**d) (2 pont)** Ha a c) alkérdés feltétele teljesül, akkor a  $K_i$  mozgási energia egy meghatározott  $K_{i,0}$  értékhez tart, miközben a hasáb gördül a lejtőn. Annak ismeretében, hogy ez a határérték létezik, mutasd meg hogy  $K_{i,0}$  így írható:

$$(1.6) \quad K_{i,0} = \kappa \cdot Mga.$$

Fejezd ki  $\kappa$  értékét  $\theta$  és  $r$  függvényeként.

**e) (2 pont)** Számítsd ki  $0,1^\circ$  pontossággal, hogy mi a lejtő hajlásszögének az a  $\theta_0$  minimuma, amelynél az egyenetlen gördülés – ha egyszer elindult – végtelen hosszan folytatódni fog.

## 2. feladat. Víz a jégmező alatt.

A jégmező szilárd talajon helyezkedik el, függőleges vastagsága néhány km, vízszintes kiterjedése többször 10 vagy 100 km. A feladatban a jég olvadását fogjuk tanulmányozni, és azt, hogy miként viselkedik a víz  $0^\circ\text{C}$  hőmérsékletű jégtömb alatt. Feltételezzük, hogy ilyen feltételek mellett a nyomásváltozások a jégben (akárcsak viszkózus folyadékban) lényegében függőleges elmozdulásokat okoznak.

E feladat megoldásánál a következő adatokat használhatod: a víz sűrűsége:  $\rho_v = 1,000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a jég sűrűsége:  $\rho_j = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a jég fajhője:  $c_v = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$ , a jég olvadáshője:  $L_j = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , a kőzet és a magma sűrűsége:  $\rho_k = 2,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a kőzet és a magma fajhője:  $c_k = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$ , a kőzet és a magma olvadáshője:  $L_k = 4,2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , a Föld felületén kilépő átlagos hőáramsűrűség:  $J_Q = 0,06 \text{ W/m}^2$ , a jég olvadáspontja:  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , állandó.

**a) (0,5 pont)** Tekints egy vastag jégmezőt, amely alatt hő áramlik fel a Föld mélyéből. A fenti adatokat használva számítsd ki, hogy évente milyen  $d$  vastagságú jégréteg olvad el!

*2.1. ábra. Lejtőn lévő sík felszínű jégtömb keresztmetszete*

2.2. ábra. Egy  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletű jégtábla úgy nyugszik egy sziklalejtőn, hogy a jég alatt a víz egyensúlyban van

**b)** (3,5 pont) Tekintsük egy jégtömb felső, sík felszínét. A jégtábla alatt a szikla-lejtő hajlásszöge  $\alpha$ . A jégtábla sík felszínének hajlásszöge  $\beta$  (2.1 ábra). A jég függőlegesen mért vastagsága az  $x = 0$  helyen  $h_0$ . Eszerint a jégtáblát alul

és felül határoló síkok egyenlete:

$$(2.1) \quad y_1 = x \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Fejezd ki a  $p$  nyomást a jégtábla alján az  $x$  vízszintes koordináta függvényeként. Ezt a képletet írd a válaszlapra! Fogalmazd meg matematikailag  $\alpha$  és  $\beta$  függvényében annak feltételét, hogy a jégtábla és a sziklatalaj közt a víz ne folyjék egyik irányba sem. Mutasd meg, hogy ez a feltétel  $\operatorname{tg} \beta = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$  alakban írható. Határozd meg az  $s$  együtthatót, és eredményedet képlet formájában add meg!

A 2.2 ábrán az  $y_1 = 0,8x$  vonal a sziklatalaj menetét mutatja a jégtábla alatt. A jég függőlegesen mért  $h_0$  vastagsága az  $x = 0$  helyen 2 km. Tételezzük fel, hogy a víz a jégtábla alatt egyensúlyban van.

A válaszlapon rajzold be az  $y_1$  egyenest, és rajzold fölé a jégtábla felszínét jelző  $y_2$  egyenest is. Jelezd az ábrán, melyik vonal melyiket jelenti!

*2.3. ábra. A jégben kialakult vízkúp függőleges  
keresztmetszete*



*2.4. ábra. A kúp alakú jég-bemélyedés centrális függőleges  
síkmetszete  
(Az ábra nem méretarányos!)*

**c)** (1 pont) Vízszintes talajon elhelyezkedő nagykiterjedésű jégtábla kezdetben  $D = 2,0$  km vastag. Ekkor a jég

viszonylag gyors megolvadása révén egy  $H = 1,0$  km vastag,  $r = 1,0$  km sugarú, kúp alakú víztömeg alakul ki (2.3 ábra). Tételezzük fel, hogy a visszamaradt jégtömeg ehhez az új állapothoz úgy alkalmazkodik, hogy benne csak függőleges elmozdulások mennek végbe. Vezesd le képletekkel üres, tiszta lapon, és rajzold le a válaszlap ábra-ablakába a jégtábla felső felületének alakját a vízkúp képződése és a hidrosztatikus egyensúly beállta után.

**d) (5 pont)** Egy nemzetközi kutatócsoport expedíciói évente megvizsgálják az Antarktisz  $0^\circ\text{C}$  hőmérsékletű jégta-karóját. Ennek felszíne normálisan egy vízszintes felületű, kiterjedt jégréteg. De most egy mély, krátterszerű mélyedésre bukkannak, ami olyan, mint egy felfordított kúp, amelynek legnagyobb  $h$  bemélyedése 100 m és  $r$  sugara 500 m (2.4 ábra).

Tapasztalataikat megbeszélve a kutatók arra a következtetésre jutnak, hogy a jég alatt kisebb vulkánkitörés történhetett. Egy kevés olvadt magma benyomult a jégréteg aljába, ott megdermedt és lehűlt, eközben bizonyos mennyiségű jeget megolvasztott. A kutatók megpróbálják megbecsülni a behatolt magma térfogatát, hogy megértsék, mitől lett a megolvadt víz. Gondolatmenetük a következő:

Tételezzük fel, hogy a jégben csak függőleges mozgás ment végbe. Azt is tételezzük fel, hogy a behatoló magma  $1200^\circ\text{C}$  hőmérsékleten teljesen folyékony állapotú volt. Az egyszerűség kedvéért még azt is feltehetjük, hogy a benyomulás kúp alakban történt, körszerűen a megfigyelt kúpos jég-bemélyedés alatt. A magma behatolása viszonylag rövid idő alatt ment végbe a hőcserélődés időigényéhez képest. A hőátadás kezdetben elsősorban függőleges irányú volt, így a jégből kiolvadt térfogat mindig kúp alakú volt, a kúp tengelye pedig a magma-benyomulás centrumán átmenő függőleges volt.

### 3.1. ábra. Tejútrendszerünk egyik rádióforrásának emissziója

Ezen feltételek mellett a jég megolvadása két lépésben ment végbe. Először a víz nincs nyomás-egyensúlyban a magma fölött, hanem elfolyik onnan. Az elfolyó víz  $0^\circ\text{C}$  hőmérsékletűnek tételezhető fel. Később beáll a hidrosztatikai egyensúly, a víz a keletkezési helyén, a magma-benyomulás felett marad, nem folyik el. Számítsd ki a következő mennyiségeket a hőmérsékleti egyensúly beálltakor, és írd ezeket a válaszlapra:

1. A jégtakaró alatt kialakult vízkúp tetőpontjának  $H$  magassága a jégtábla alapjának eredeti szintjéhez képest.
2. A magmabehatolás  $h_1$  magassága.
3. A keletkezett víz teljes  $m_t$  tömege és az elfolyt víz  $m'$  tömege.

Milliméterpapíron ábrázold *méretarányosan* a magma-behatolás és a visszamaradt víztömeg alakját! A 2.4 ábra által sugallt koordináta-rendszert használd!

### 3. feladat. Fénynél sebesebben?

Ebben a feladatban egy 1994-ben elvégzett mérést elemzünk és értelmezünk. A mérés egy a Tejútrendszerben lévő összetett forrás rádióhullámú sugárzására vonatkozik. A szélessávú vevőantenna centiméteres hullámhosszú rádióhullámokra volt hangolva. A 3.1 ábra azt mutatja, hogy különböző időpontokban milyen képet láttak. A „szintvonalak” az azonos intenzitásokat jelzik, mint ahogyan a földrajzi térkép szintvonalai az azonos magasságú pontokat kötik össze. A képen látható és szaggatott vonalakkal érzékeltetett két maximumot úgy értelmezik, hogy két objektum távolodik egy közös centrumtól. Ezt a centrumot kereszttek jelzik az ábrákon. (A centrumról feltételezik, hogy nyugszik a térben; ez is erős rádióforrás, de főleg más hullámhosszon sugároz.) A méréseket több, mint egy hónapon át mindig azonos napszakban, azonos órában végezték el. Az ábra léptékét egy skálaszakasz jelzi, ami 1 ívmásodpercnek felel meg (1 ívmásodperc = 1 arc sec = 1 as =  $\frac{1}{3600}$  szögfok). A centrumban lévő keresztrel jelölt égitest becsült távolsága  $R = 12,5$  kpc. Egy kiloparsec (kpc)  $3,09 \cdot 10^{19}$  m-nek felel meg. A fény sebessége:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s. A feladat megoldásában nem kell hibaszámítást végezni.

**a) (2 pont)** A két kidobott rádióforrás szögtávolságát a centrumtól  $\theta_1(t)$  és  $\theta_2(t)$  jelöli. (Jelölés: 1 a bal oldali, 2 a jobb oldali forrás,  $t$  a megfigyelés ideje.) A Földről látszó szögsebességek  $\omega_1$  és  $\omega_2$ . A két rádióforrásnak megfelelő transzverzális (keresztirányú) sebességek:  $v'_{1,\perp}$  és  $v'_{2,\perp}$ . A 3.1 ábra alapján határozd meg  $\omega_1$  és  $\omega_2$  értékét ezredívmásodperc/nap egységekben. Határozd meg  $v'_{1,\perp}$  és  $v'_{2,\perp}$  számértékeit is. (Némelyik eredményt meglepőnek fogod találni.)

**b) (3 pont)** Az előző alkérdésben támadt probléma feloldása érdekében képzelj el egy fényforrást, ami  $\vec{v}$  sebességgel mozog egy tőle távoli  $O$  megfigyelő irányához képest  $\varphi$  szögben ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ). A sebesség nagyságát jelölje  $v = \beta c$ , ahol  $c$  a fénysebesség. A fényforrás távolságát a megfigyelő  $R$ -nek méri, a fényforrás szögsebességét  $\omega$ -nak észleli. A látásirányra merőleges látszólagos sebesség  $v'_\perp$ .

Határozd meg  $\omega$  és  $v'_\perp$  értékeit  $\beta$ ,  $R$  és  $\varphi$  függvényében!

**c) (1 pont)** Feltételezzük, hogy az a) alkérdésben szereplő két kidobott objektum egymáshoz képest ellenkező irányban mozog, szétrepülési sebességük egyenlő,  $v = \beta c$ . Ekkor a b) alkérdés eredményei alapján  $\beta$  és  $\varphi$  kiszámítható az  $\omega_1$  és  $\omega_2$  szögsebességek, valamint az  $R$  távolság ismeretében. Itt  $\varphi$  a b) alkérdésben értelmezett szög a bal oldali objektumra vonatkozóan, ami az a) alkérdésben az 1 indexnek felel meg. Vezess le képleteket arra, hogyan kell ismert mennyiségekből kiszámítani  $\beta$  és  $\varphi$  értékét. Határozd meg  $\beta$  és  $\varphi$  értékét az a) alkérdésben megadott számértékek alapján.

**d) (2 pont)** A b) alkérdés szerinti egy-test esetben keresd meg annak feltételét, hogy a látszólagos  $v'_\perp$  transzverzális sebesség nagyobb legyen, mint a  $c$  fénysebesség. Írd ezt a feltételt  $\beta > f(\varphi)$  alakba, az  $f$  függvényre keress analitikus alakot, és add meg azt a válaszlapon! Rajzold le a  $(\beta, \varphi)$  koordinátásík fizikailag értelmes tartományát. Satirozd be azt a tartományt, ahol  $v'_\perp > c$  teljesül.

**e) (2 pont)** A b) alkérdésben tárgyalt egy-test esetben találj egy képletet a  $v'_\perp$  látszólagos transzverzális sebesség maximális  $(v'_\perp)_{\max}$  értékére adott  $\beta$  esetén! Észreveheted, hogy ez a maximális látszólagos transzverzális sebesség minden határon túl nőhet, ha  $\beta \rightarrow 1$ .

**f) (1 pont)** Az  $R$  értékére vonatkozóan a bevezetőben megadott becsült érték nem megbízható. Ezért a kutatók azon kezdtek gondolkodni, hogy létezik-e jobb és közvetlenebb módszer  $R$  meghatározására. Az egyik ötlet a következő:

Tételezd fel, hogy a két kidobott tárgy színekében azonosítjuk és megmérjük egy színeképvonal Doppler-eltolódott  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  hullámhosszait, ami nyugvó objektum sugárzása esetén  $\lambda_0$  volna. Indulj ki a relativisztikus Doppler-eltolódás képletéből:

$$(3.1) \quad \lambda = \frac{\lambda_0(1 - \beta \cos \varphi)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Mint korábban, most is tételezd fel, hogy a két tárgy sebessége ugyanolyan nagyságú. Mutasd meg, hogy az ismeretlen  $\beta = v/c$  kifejezhető  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  függvényeként a következő képlettel:

$$(3.2) \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Írd be az  $\alpha$  együttható számértékét a válaszlap megfelelő ablakába. Észreveheted, hogy ily módon a hullámhosszak mért értékeiből gyakorlati becslést kaphatsz az  $R$  távolságra.

### Kísérleti forduló

\*\*0

<sup>0</sup> Az olimpián 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére.

*Rendelkezésre álló eszközök:* Alaplap 6 banándugó hüvellyel; az alaplapba beépített mérőtekercs; U alakú ferritmag A és B jelű tekercssel; U alakú ferritmag tekercs nélkül; 25  $\mu\text{m}$ , 50  $\mu\text{m}$  és 100  $\mu\text{m}$  vastag alumínium fólia; jelgenerátor részletes használati utasítással; két multiméter (részletes leírással); 6 db röpszinór banándugóval; 2 db gumigyűrű és 2 kis darab pauszpapír.

### I. örvényáramok mágneses árnyékolása (8 pont)

Időben változó mágneses terek vezetőkben örvényáramokat keltenek. Az örvényáramok viszont ellentétes mágneses teret hoznak létre. Közösítéses fémekben a véges vezetőképesség miatt a mágneses tér leárnyékolása nem tökéletes. Az alumínium fólia leárnyékolását fenomenológiailag (tapasztalatok alapján) a

$$(1) \quad B = B_0 e^{-\alpha d}$$

képlettel írjuk le.  $B$  a mágneses indukció az alumínium fólia árnyékolása alatt.  $B_0$  a mágneses indukció ugyanezen a helyen, ha nincs jelen fólia,  $\alpha$  az árnyékolási együttható és  $d$  a fólia vastagsága.

### A mérés

A ferritmagot, amelyen a tekercsek vannak, talpaival lefelé úgy állítsd a kiemelkedő fatuskóra, hogy az A tekercs pontosan az alaplapba épített mérőtekercs felett legyen. A vasmagot rögzítsd az alaplapra a gumigyűrűvel, ami a tekercset a fatuskó alatt átvezetve az alaplaphoz köti. Feltételezheted, hogy az alumínium vastagságának és a frekvenciamérésnek elhanyagolható a hibája.

1. (1 pont) Az A és B tekercs csatlakoztató végződéseit vedd el a banándugó-hüvelyekhez, és mérd meg mind a három tekercs ellenállását abból a célból, hogy biztos lehess, hogy jók a csatlakozások. 10  $\Omega$ -nál kisebb ellenállásértékeket várhatsz.

2. (5 pont) Gyűjts mérési adatokat, hogy ellenőrizd a fent megadott modell-képletet, és határozd meg a (25–175  $\mu\text{m}$  vastag) alumínium fóliák  $\alpha$  árnyékolási faktorát a 6–18 kHz frekvenciatartományban. Az alumínium fóliákat a mérőtekercs fölé helyezd úgy, hogy a fóliák az alaplapon bejelölt téglalapot fedjék. Az A tekercsre szinuszos váltófeszültséget kapcsolj!

3. (2 pont) ábrázold  $\alpha$  értékeit az  $f$  frekvencia függvényében!

### II. Mágneses fluxuscsatolás (12 pont)

Azt tanulmányozzuk, hogy két tekercs, melyek közös ferritmagja zárt, hogyan reagál egy külső  $U_g$  váltófeszültségre, amit egy szinuszos jelgenerátor ad. Az általad használt berendezésben minden mágneses telítődési jelenség elhanyagolható. Ezen kívül azt is feltételezheted, hogy a ferrit  $\mu$  mágneses permeabilitása állandó.

### Elméleti háttér

Az itt következő elméleti tárgyalásban és az adatok elemzésében is feltételezzük, hogy a két tekercs ohmikus ellenállása és a ferritmag hiszterézis-jelensége elhanyagolható befolyást gyakorol a mért áramerősségekre és feszültségekre. Ezen egyszerűsítések miatt az alábbi tárgyalásban a mért és számított értékek között bizonyos eltérések jelentkezhetnek.

#### Egy tekercs esete

Először tekintsük egy  $I$  áram által átvárt tekercs magját. Az a  $\Phi$  mágneses fluxus, amit az áram a tekercsben lévő ferritmagban kelt, arányos az  $I$  áramerősséggel és az  $N$  menetszámmal. A fluxus még egy  $g$  geometriai tényezőtől is függ, ami a vasmag nagyságától, alakjától és  $\mu = \mu_r \mu_0$  permeabilitásától függ. (A mágneses permeabilitás a mag anyagának mágneses tulajdonságait írja le. A relatív permeabilitás jele  $\mu_r$ , a vákuum permeabilitása  $\mu_0$ .) A  $\Phi$  mágneses fluxust a

$$(2) \quad \Phi = \mu g N I = c N I$$

képlet adja meg, ahol  $c = \mu g$ . Az indukált feszültség a Faraday-féle indukciótörvényből kapható:

$$(3) \quad U(t) = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = -c N^2 \frac{dI(t)}{dt}.$$

Egy  $L$  önindukciós együtthatójú tekercsben az áramerősség és a feszültség kapcsolatát az

$$(4) \quad U(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}$$

összefüggéssel szokás leírni. A tekercsre kapcsolt szinuszos jelgenerátor

$$(5) \quad I(t) = I_0 \sin \omega t$$

áramot hajt át rajta, ahol  $\omega$  a körfrekvencia és  $I_0$  az áram amplitúdója. A (3) egyenlet szerint ez a váltóáram a tekercsben

$$(6) \quad U(t) = -\omega c N^2 I_0 \cos \omega t$$

váltófeszültséget indukál. Az áram olyan lesz, hogy az indukált feszültség megegyezzen a jelgenerátor  $U_g$  feszültségével. Az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség  $90^\circ$ -os. Ha csak a váltófeszültség és váltóáram  $U_0$ , ill.  $I_0$  amplitúdóját tekintjük és a fáziskülönbséget elhagyjuk, az összefüggésünket így írhatjuk:

$$(7) \quad U_0 = \omega c N^2 I_0.$$

(A továbbiakban a 0 alsó indexet elhagyjuk.)

#### *Két tekercs esete*

Most tételezzük fel, hogy egy ferritmagon két tekercs van. A ferrit vasmag arra használható, hogy csatolja a mágneses fluxust a tekercsek között. Ideális vasmag esetén a fluxus a mag bármely keresztmetszetén ugyanakkora. Valóságos magok esetében a tapasztalat azt mutatja, hogy a fluxusszóródás miatt a szekunder tekercsen kisebb fluxus lesz, mint a fluxust létrehozó tekercsen. A  $B$  szekunder tekercs  $\Phi_B$  fluxusa és az  $A$  primér tekercs  $\Phi_A$  fluxusa ezek szerint a következő kapcsolatban van:

$$(8) \quad \Phi_B = k \Phi_A.$$

Ugyanígy a  $B$ -ben folyó áram által keltett  $\Phi_B$  fluxus az  $A$  tekercsben  $\Phi_A = k \cdot \Phi_B$  fluxus-összetevőt fog kelteni. A  $k$  csatolási tényező 1-nél kisebb. A mérés során tanulmányozandó ferritmagon két tekercs van transzformátor elrendezésben. Tételezzük fel, hogy az  $A$  (primer) tekercset kapcsoljuk a jelgenerátorra. Ha a  $B$  tekercsben nem folyik áram ( $I_B = 0$ ), akkor az  $I_A$  által indukált  $U_A$  feszültség azonos nagyságú és ellentétes  $U_g$ -vel. Az  $I_A$  által a szekunder tekercsben keltett fluxus a (8) képletből számolható. Így a  $B$  tekercsben indukált feszültség:

$$(9) \quad U_B = \omega k c N_A N_B I_A.$$

*4. ábra. Transzformátor zárt mágneses körrel*

Ha a  $B$  tekercsben  $I_B$  áram folyik, akkor az az  $A$  tekercsben feszültséget indukál, amit az előző összefüggéshez hasonlóan határozhatunk meg. Az  $A$  tekercs teljes feszültségét így a következő képlet adja meg:

$$(10) \quad U_g = U_A = \omega c N_A^2 I_A - \omega k c N_A N_B I_B.$$

A szekunder tekercs árama tehát a primer tekercsben ellentétes feszültséget indukál, ami  $I_A$  növekedését okozza.

Hasonló összefüggés írható fel  $U_B$ -re is. Mérésekkel igazolható, hogy  $k$  értéke független attól, hogy melyik tekercset választjuk primer tekercsnek.

### A mérés

A két U alakú ferritmagot illeszd össze a 2. ábrán látható módon, és rögzítsd őket a gumigyűrűvel. állítsd be a jelgenerátort úgy, hogy 10 kHz-es szinuszos hullámot adjon. Gondolj arra, hogy a multimétereket az egyes méréseknél az ott alkalmazható legérzékenyebb méréshatárban használd. Az  $A$  és a  $B$  tekercs menetszáma:  $N_A = 150$ ,  $N_B = 100$  ( $\pm 1$  menet tekercsenként).

1. (3,5 pont) Bizonyítsd be, hogy az  $L_A$  és  $L_B$  önindukciós együtthatókra, valamint a  $k$  csatolási tényezőre a következő összefüggések érvényesek:

$$L_A = \frac{U_A}{\omega I_A}, \quad I_B = 0,$$

$$L_B = \frac{U_B}{\omega I_B}, \quad I_A = 0,$$

$$k = \frac{N_B I_B}{N_A I_A}, \quad U_B = 0.$$

*5. ábra. A ferritmagok a két távtartóval*

A válaszlap 1.a ablakában utalj bizonyításod lényegére! A válaszlap 1.b ablakába rajzold le azokat az áramköröket, melyek segítségével  $L_A$ ,  $L_B$  és  $k$  meghatározható! A mérés elvégzése után számítsd ki  $L_A$ ,  $L_B$  és  $k$  számértékét, és értéküket írd a válaszlap 1.c ablakába!

**2. (2 pont)** Amikor a szekunder tekercs rövidre van zárva, a primer tekercs  $I_p$  áramerőssége növekedni fog. Az előzőekben ismertetett egyenletek alapján add meg, hogy  $I_p$  hogyan függ a primer feszültségtől, a primer tekercs



önindukciós együtthatójától és a  $k$  csatolási tényezőtől. Válaszodat írd a válaszlapon 2.a ablakába! Mérd meg  $I_p$  értékét, a kapott adatot írd a válaszlapon 2.b ablakába!

**3. (2,5 pont)** Az  $A$  és a  $B$  tekercset kétféleképpen kapcsolhatjuk sorba: úgy, hogy a két fluxusjárulék összeadódjék, vagy levonódjék egymásból.

**3.1.** Számítsd ki a sorbakapcsolt tekercsek  $L_{A+B}$  önindukciós együtthatóját a mért adatok alapján arra az esetre, amikor a két tekercs  $I$  árama által létrehozott fluxusok összeadódnak (erősítik egymást). Válaszodat írd a válaszlapon 3.1 ablakába.

**3.2.** Mérd meg a  $U_A$  és  $U_B$  feszültséget arra az esetre, amikor a két tekercs fluxusai ellentétesek. Mért adataidat írd a válaszlapon 3.2a ablakába. A két feszültség hányadosát írd a 3.2b ablakba. Vezess le egy képletet a két tekercsre vonatkozó feszültségek hányadosára a menetszámok és a csatolási tényező segítségével, és válaszodat írd a 3.2c ablakba.

**4. (1 pont)** Eredményeid alapján igazold, hogy egy tekercs önindukciós együtthatója menetszámának négyzetével arányos. Eredményedet írd a válaszlapon 4. ablakába!

**5. (1 pont)** Igazold, hogy jogos volt a primer tekercs ohmos ellenállásának elhanyagolása. érvelésedet matematikai kifejezések alakjában írd a válaszlapon 5. ablakába.

**6. (2 pont)** Ha vékony papírlapokat illesztünk a két fél ferritmag közé (ahogy ezt a 2. ábra mutatja), akkor a tekercs önindukciós együtthatója jelentősen lecsökken. Ezt a csökkenést felhasználva határozd meg a ferrit-anyag  $\mu_r$  relatív permeabilitását. Ehhez használd fel az Ampère-féle gerjesztési törvényt, továbbá azt a tényt, hogy a  $B$  mágneses indukció nem változik meg a ferrit-papír határfelületen. Tételezd fel, hogy a papír relatív permeabilitása egységnyi, vagyis  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Ns}^2/\text{Cb}^2$ , továbbá a papír vastagsága  $43 \mu\text{m}$ . A geometriai tényező meghatározásánál használd az Ampère-féle gerjesztési törvényt:

$$(11) \quad \oint \frac{1}{\mu} B dl = I_{\text{teljes}},$$

ahol  $I_{\text{teljes}}$  az integrációs út által kifeszített felületet átmetsző áramok összege. Írd be  $\mu_r$ -re kapott algebrai kifejezésedet a válaszlapon 6.a ablakába, számszerű értékét pedig a 6.b ablakba.