

<sup>1</sup>A feladatok szövegét az októberi számunkban közöltük.

## Kísérleti forduló

### Torziós inga

a) Az összetett rendszer tömegközéppontja a forgástengelytől

$$R(x) = \frac{M_1 R_1 + M_2(x - l/2)}{M_1 + M_2}$$

távolságra van.

b) Az ingatestet tömegközéppontjának a végétől számított  $R(x)$  távolságát vízszintes helyzetben mérhetjük meg. Az alkalmas helyen alátámasztott (kiegysúlyozott) ingánál különböző  $x_i$  értékek  $R(x_i)$  könnyen mérhető. A mérési adatokat milliméterpapíron ábrázolva, majd azokra egyenest illesztve leolvashatjuk az  $R(x) \approx ax + b$  összefüggésnek meg felelő  $a = M_2/(M_1 + M_2)$  arányt, majd (a megadott  $M_1 + M_2$  ismeretében) ebből a tömegeket külön-külön is kiszámíthatjuk. Az így mért  $M_1$  és  $M_2$  mérési pontosságára az illesztett egyenes  $a$  meredekségének bizonytalanságából következtethetünk.

c) Az inga teljes tehetetlenségi nyomatéka az  $x$  paraméter függvényében:

$$I(x) = I_1 + I_2(x) = M_2 x^2 - M_2 l x + \left( I_1 + \frac{M_2}{3} l^2 \right).$$

d) A függőleges forgástengelyű inga mozgásegyenlete:

$$I(x) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0).$$

A vízszintes tengelyű elrendezésnél a fenti mozgásegyenlet jobb oldalát a súlyerő forgatónyomatékának megfelelő taggal kell kiegészítenünk:

$$I(x) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\kappa(\theta - \theta_0) + (M_1 + M_2) g \cdot R(x) \sin \theta.$$

e) és f) Az egyensúlyt jellemző  $\theta_e$  szöget az inga felső végpontjának helyzetét megadó koordinátákból számíthatjuk ki. Ezek a koordináták a rendelkezésre álló háromszögvonalzó és az asztalra terített milliméterpapír segítségével jól mérhetők. Egyensúlyban fennáll a

$$-\kappa(\theta - \theta_0) + (M_1 + M_2) g \cdot R(x) \sin \theta = 0$$

összefüggés. Különböző  $x_i$  értékek mellett mérve  $\vartheta_{e,i}$  egyensúlyi szögkitérést és a mérési adatokból kiszámítva az

$$y_i = (M_1 + M_2) g \cdot R(x_i) \sin \theta_{e,i}$$

mennyiségét,  $y_i$  és  $\theta_{e,i}$  között lineáris kapcsolatot várhatunk:

$$y_i = \kappa \theta_{e,i} - \kappa \theta_0.$$

A mérési adatokra illesztett egyenes meredekségéből  $\kappa$  (és annak mérési hibája is) leolvasható.

g) A függőleges tengelyű inga lengésideje és a tehetetlenségi nyomatéka között fennáll az

$$I(x) = \frac{\kappa T^2(x)}{4\pi^2}$$

összefüggés (lásd a megfelelő mozgásegyenletet és annak ismert megoldását). Ez az összefüggés (felhasználva  $I(x)$  korábban kiszámított alakját) így is felírható:

$$\frac{\kappa}{4\pi^2} T^2(x) - M_2 x^2 = -M_2 l x + \left( I_1 + \frac{M_2}{3} l^2 \right).$$

A fenti egyenlet bal oldalán mérhető, illetve ismert mennyiségek állnak. Ezek mért értékeit  $x$  függvényében ábrázolva az illesztett egyenes meredekségéből és tengelymetszetéből a keresett  $l$  és  $I_1$  meghatározható.

h) A vízszintes tengelyű (a függőlegeshez közeli egyensúlyi helyzetű) inga torziós lengéseinek  $T(x)$  periódusidejét különböző  $x$  értékek mellett stopperal mérhetjük. A lengéside  $x$  függvényében egyetlen (viszonylag éles) maximummal rendelkező görbével szemléltethetjük.

## Elméleti forduló

### 1. feladat. Sugárzás elnyelődése gázban.

a) A tartályban levő gáz nyomása a folyamat során nem változik:

$$p = p_0 + \frac{mg}{r^2\pi} = 102,3 \text{ kPa.}$$

A gáztörvény szerint  $pV = nRT$ , ahonnan az állandó nyomáson táguló gázra

$$\Delta T = \frac{p\Delta V}{nR} = \frac{1,02 \cdot 10^5 \cdot 0,05^2\pi \cdot 0,03}{0,1 \cdot 8,31} = 28,9 \text{ K.}$$

A gáz tehát 48,9 °C-ra melegszik fel.

b) A  $p = p_0 + (mg/(r^2\pi))$  nyomású gáz, miközben a besugárzás hatására az üveglap  $\Delta s$  távolságnyi elmozdul,  $W = p\Delta V = p_0\Delta V + mg\Delta s = 24 \text{ J}$  munkát végez. Ebből a munkából 0,24 J az üveglap helyzeti energiájának növelésére, 23,8 J pedig ahhoz szükséges, hogy a dugattyú a légkört egy kicsit „megemlje”.

c) A folyamat során elnyelt sugárzási energia (hő):

$$Q = nC_V\Delta T + W = 60,1 \text{ J} + 24,0 \text{ J} = 84,1 \text{ J.}$$

d) A lézer sugárzási teljesítménye (vagyis a gáz által elnyelt teljesítmény)  $P = Q/\Delta t = 8,4 \text{ W}$ .

A gáz által időegységenként elnyelt fotonok száma

$$\frac{P}{hf} = 2,2 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

e) Az elnyelt fényenergia

$$\eta = \frac{mg\Delta s}{Q} = 0,0028$$

része, vagyis mindössze 0,3 %-a alakul át az üveglap mechanikai helyzeti energiájává.

f) A tartály elforgatásakor a gáz nyomása is és a hőmérséklete is megváltozik. A nyomás a külső légnyomással fog megegyezni, vagyis 102,3 kPa-ról 101,3 kPa-ra csökken. A folyamat során nem közlünk hőt a gázzal, a tágulás tehát adiabatikus, melyre fennáll a  $pV^\kappa = \text{állandó}$  összefüggés, ahol

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \approx 1,4.$$

Ebből és az általános gáztörvényből adódik, hogy a gáz hőmérséklete az elfordítás után

$$T_1 = 322 \text{ K} \cdot \left(\frac{101,3}{102,3}\right)^{0,29} \approx 321 \text{ K,}$$

tehát mindössze 1 fokkal hűl le.

### 2. feladat. V-alakú áramvezető mágneses tere.

a) A mágneses indukcióvektor (a Biot–Savart-törvény alapján) a  $P$  pontban a papír síkjára merőlegesen, felfelé mutat.

b) A megadott formula  $\alpha = \pi/2$  esetben (egyenes vezetőre) is igaz. Ekkor viszont az Ampère-törvény értelmében

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = k \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4},$$

ahonnan a keresett arányossági tényezőre

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

c) A  $P^*$  pontban ( $P$ -nek a csúcspontra vonatkoztatott tükörképében) a mágneses indukció a papír síkjára merőlegesen lefelé mutat. A nagyságát többféle gondolatmenettel is meg tudjuk határozni.

Érvelhetünk úgy, hogy ha  $\alpha$  helyébe  $(\pi - \alpha)$ -t írunk, vagyis a V-alakú vezetőket „kifordítjuk”, akkor a  $P$  pont a vezetékhez képest éppen olyan helyzetbe kerül, mint amilyenben a  $P^*$  pont volt az eredeti vezetékhez képest. Eszerint

$$|\mathbf{B}(P^*)| = k \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = k \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Másfajta megfontolással, a végtelen egyenes vezető mágneses terének ismeretét felhasználva is eljuthatunk a fenti eredményhez. Egészítsük ki gondolatban a V-alakú vezetőket egy másik, ugyanakkora árammal átjárt V-alakkal úgy, hogy két egymást metsző végtelen egyenes vezetőt kapjunk. A kérdéses  $P^*$  pont mindkét vezetőtől  $d \sin \alpha$  távolságra van. A két vezeték mágneses terét szuperponálhatjuk, és kihasználhatjuk, hogy a végtelen egyenes vezető mágneses terét ismerjük:

$$|\mathbf{B}(P^*)| + |\mathbf{B}(P)| = 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{2\pi d \sin \alpha},$$

ahonnan

$$|\mathbf{B}(P^*)| = k \cdot \left( \frac{2}{\sin \alpha} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = k \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

**d)** Ha egy  $\mu$  mágneses dipólmomentumú, csapágyazott tengelyű mágnest  $B$  indukciójú mágneses térben az egyensúlyi helyzetéből kicsiny  $\varphi$  szöggel kitérítünk, a mágnesre

$$M(\varphi) = -\mu \cdot B \cdot \sin \varphi \approx -\mu \cdot B \cdot \varphi$$

forgatónyomaték hat. Innen (a rezgőmozgás ismert képleteivel összevetve) leolvasható, hogy a torziós lengések periódusideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}} \propto \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

**e)** A két elméletnek a torziós lengések periódusidejére vonatkozó jóslatának aránya:

$$\frac{T_{\text{Ampère}}}{T_{\text{Biot-Savart}}} = \sqrt{\frac{B_{\text{Biot-Savart}}}{B_{\text{Ampère}}}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \operatorname{tg}(\alpha/2)}}.$$

Ez az arány  $\alpha \rightarrow \pi/2$  szögeknél (vagyis az egyenes vezető határeseténél) 1-hez tart. A másik határesetben, nagyon kicsiny  $\alpha$  szögeknél (nagyon „hegyes” V-alaknál)  $\sqrt{4/\pi} = 1,13$ , tehát itt sem tér el nagyon a két elmélet jóslata. A mérhetőség feltétele az, hogy a két jóslat legalább 10 százalékkal eltérjen egymástól, vagyis

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \operatorname{tg}(\alpha/2)}} > 1,1$$

teljesüljön. Ezt az egyenlőtlenséget közelítőleg (pl. próbálgatással) egy zsebszámológép segítségével könnyen meg lehet oldani, s a kérdéses szögtartományra  $\alpha < 0,77 \text{ rad} = 44^\circ$  adódik.

**3. feladat.** Űrszonda a Jupiter gravitációs terében.

**a)** A Jupiter keringési sebessége a Nap körül a

$$\frac{V^2}{R} = \frac{GM_S}{R^2}$$

mozgásegyenletből számítható:

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \approx 1,306 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

(A feladat szövegében megadott adatok között szerepelt a Jupiter pályasugara és keringési ideje. Ebből a két számból is kiszámítható a kérdéses — egyenletes körmozgásnak megfelelő — sebesség.)

**b)** A Nap és a Jupiter gravitációs vonzóerejének nagysága akkor egyenlő, ha fennáll

$$\frac{GMm}{x^2} = \frac{GM_S m}{(R-x)^2},$$

ahol  $x$  a Jupitertől mért távolság,  $M$  pedig a Jupiter tömege. Innen

$$x = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M_S} + \sqrt{M}} R = 0,02997 R = 2,333 \cdot 10^{10} \text{ m}.$$

**c)** A Naphoz rögzített vonatkoztatási rendszerből (ahol a szonda sebessége:  $v_x = 0$ ;  $v_y = v_0$ ) egyszerű Galilei-transzformációval térhetünk át a Jupiter  $V$  sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerébe. Itt

$$v_x = V, \quad v_y = v_0,$$

ahonnan

$$v = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1,65 \cdot 10^4 \text{ m/s} \quad \text{és} \quad \varphi = \arctg \frac{v_0}{V} = 0,653 \text{ rad} = 37,4^\circ.$$

**d)** A Jupiter vonatkoztatási rendszerében (a Jupitertől elegendően távol, de nem „végtelen messze”) a szonda teljes  $E$  mechanikai energiája jó közelítéssel a mozgási energiájával egyenlő:

$$E \approx \frac{1}{2}mv'^2 = 112 \text{ GJ}.$$

**e)** Az űrszonda pályájának polárkoordinátákkal kifejezett egyenlete a Jupiter vonatkoztatási rendszerében:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right).$$

( $b$  az hiperbola alakú pályagörbe aszimptotáinak távolsága a vonzócentrumtól, az ún. impakt paraméter.) Mivel az  $r$  vezérsugár nem lehet negatív szám, a mozgás során csak olyan  $\theta$  polárszögek fordulhatnak elő, melyekre

$$\cos \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}}.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\theta = \theta_{\pm} = \pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}} \right).$$

Az eltérülés szöge (lásd a feladat múlt hónapban közölt szövegénél a 9. ábrát)

$$\Delta \theta = (\theta_+ - \theta_-) - \pi = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4 b^2}{G^2 M^2}}}.$$

**f)** A szonda akkor kerül a legközelebb a Jupiterhez, amikor  $\theta = 0$ . A legkisebb távolság a bolygótól (a pályagörbe egyenlete szerint):

$$r_{\min} = \frac{v'^2 b^2}{GM} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v'^4 b^2}{G^2 M^2}} \right)^{-1},$$

ahonnan a kérdéses legkisebb impakt paraméter

$$b = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2GM}{v'^2} r_{\min}}.$$

Ugyanez az eredmény közvetlenül is megkapható az energia- és a perdületmegmaradás törvényéből, ha azokat a szonda legtávolabbi és a legközelebbi helyzeteire alkalmazzuk.)

Feltevéseink szerint a szonda nem kerülhet közelebb a Jupiter középpontjához, mint a bolygó sugarának háromszorosára. A fenti összefüggések szerint ennek az a feltétele, hogy

$$b \geq b_{\min} = \sqrt{9R_B^2 + \frac{6GM}{v'^2} R_B} \approx 7,0 R_B = 4,9 \cdot 10^8 \text{ m},$$

és az ennek megfelelő (legnagyobb) eltérülési szög:

$$\Delta \theta_{\max} = 1,256 \text{ rad} = 87,4^\circ.$$

**g)** A Jupiter vonatkoztatási rendszerében a szonda sebessége az eltérítés után is  $v'$ , iránya pedig  $\theta_0 + \Delta \theta$  szöget zár be az  $x$  tengellyel. A Nap vonatkoztatási rendszerébe egy újabb Galilei-transzformációval térhetünk vissza:

$$v''_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta \theta) - V,$$

$$v''_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta \theta).$$

Innen – algebrai átalakítások után – megkaphatjuk a szonda sebességének nagyságát a Nap koordináta-rendszerében:

$$v'' = \sqrt{v''_x^2 + v''_y^2} = \sqrt{v_0(v_0 + 2V \sin \Delta \theta) + 2V^2(1 - \cos \Delta \theta)}.$$

**h)** A legnagyobb megengedett értékű szögeltérülésnél a szonda végsebessége:  
 $v'' = 2,62 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$