

A fizika OKTV-t az előző évek gyakorlatához hasonlóan az elmúlt tanévben is három kategóriában és három fordulóban rendezték meg. Az első (iskolai) és a második (megyei) fordulón elméleti problémákat, a harmadik fordulón pedig mérési feladatokat oldottak meg a versenyzők. A végső sorrendet a második és a harmadik fordulóban elért pontszám összege alapján állapította meg a versenybizottság. Az alábbiakban ismertetjük a verseny II. fordulójának feladatait és azok megoldását.¹ Az elméleti forduló feladatairól és azok megoldásairól *Holics László: Versenyfeladatok II. című könyvében* (TypoTeX Kiadó, 1997.) olvasható részletes beszámoló.

Az I. kategória (szakközépiskolások) feladatai

1. feladat. $L = 1$ m hosszúságú, vékony, homogén pálca egyik végéhez (A) a pálcára merőleges tengely van erősítve, amelynél fogva egy kampóra függesztettük. A pálcát a vízszintesig kitérítjük, majd kezdősebesség nélkül elengedjük. A kampó olyan (kisméretű) körívet alkot, hogy a pálca elhagyja a kampót amikor a függőlegessel $\alpha = 30^\circ$ -os szöget alkot.

Mekkora szöget alkot a pálca a vízszintessel abban a pillanatban, amikor középpontja (S) a kampótól való elválás után a legmagasabbra kerül?

(Holics László)

Megoldás. Amikor a pálca elválna a kampótól, tömegközéppontja ferde hajtást végez. Közben a pálca a már megszerzett szögsebességével egyenletesen forog (a homogén nehézségi erőnek nincs a tömegközéppontra vonatkoztatva forgatónyomatéka). Meghatározzuk a tömegközéppont (S) elváláskori pillanatnyi sebességének nagyságát és irányát valamint a pálca szögsebességét, a hajtás emelkedési idejét, majd ebből a pálca szögelfordulását, végül a vízszintessel bezárt szögét.

A munkatételből:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}\Theta_A\omega^2,$$

ahonnan a szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} \cos \alpha}.$$

Innen a tömegközéppont sebessége: $v = L\omega/2$. A hajtás szöge ugyancsak α . Ezzel a hajtás sebességének függőleges összetevője: $v_y = v \sin \alpha$. Az emelkedés ideje (a maximális magasság elérésének pillanata a hajtás kezdetétől számítva):

$$\Delta t_{\text{em}} = \frac{v_y}{g} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3L}{g \cos \alpha}} \cdot \sin \alpha.$$

A pálca szögelfordulása ezalatt:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t_{\text{em}} = \sqrt{\frac{3g}{L} \cos \alpha} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3L}{g} \cos \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{3}{2} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{3}{4} \sin 2\alpha.$$

A pálca vízszintessel bezárt hajlásszöge a ferde hajtás kezdetén: $\varepsilon = (\pi/2) - \alpha = 60^\circ$, kérdéses pillanatban pedig:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \Delta \varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \sin 2\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \sin 60^\circ = 0,398 \text{ rad} = 22,8^\circ.$$

2. feladat. Az $AB = 1$ m hosszú, szakasz végpontjaiban két $Q = 10^{-6}$ C nagyságú pozitív töltés van rögzítve. A szakasz egyik felezőmerőlegesének valamely C pontjából nyugalomból elengedünk egy $m = 1$ g tömegű és $Q^* = -10^{-6}$ C töltésű pontszerű testet. Ez a test az AB szakaszra $v = 3$ m/s sebességgel érkezik.

a) Milyen messze van a C pont az AB szakasztól?

b) Milyen mozgást végez a test? Ábrázoljuk közelítően az erőt az AB szakasztól való távolság függvényében!

c) A test mozgása során hol veszi fel a sebesség és a gyorsulás legnagyobb és a legkisebb értékét? Mekkora ezek az értékek? (A folyamat légüres térben és súlytalanság állapotában megy végbe.)

(Blészer Jenő)

Megoldás. a) A testre ható erők eredője az AB szakaszra merőleges, tehát a test az AB szakaszt az F felezőpontban éri el. Keressük a CF szakasz hosszát.

Írjuk fel a C és F pontbeli energiákat! (A numerikus számításnál SI egységeket használunk.) C-ben a mozgási energia nulla, a helyzeti energia pedig

$$E_C^{(h)} = 2 \cdot k \frac{QQ^*}{\sqrt{d^2 + x^2}} = -\frac{18 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{0,5^2 + x^2}},$$

ahol $d = \frac{1}{2}AB$. Az F pontban a mozgási energia:

$$E_F^{(m)} = \frac{1}{2}mv^2 = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ J},$$

a helyzeti energia pedig

$$E_F^{(h)} = 2 \cdot k \frac{QQ^*}{d} = -36 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$-36 \cdot 10^{-3} + 4,5 \cdot 10^{-3} = -\frac{18 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{0,5^2 + x^2}},$$

ahonnan a keresett $x = FC$ távolságra $0,277 \text{ m} = 27,7 \text{ cm}$ adódik.

b) A test az F pontot elhagyva az energiamegmaradás törvénye alapján a felező merőlegesen továbbhaladva egy olyan C' pontig jut el, amelyre $FC' = 27,7 \text{ cm}$, és ott visszafordul. A mozgás ezután ismétlődik, azaz $27,7 \text{ cm}$ amplitúdójú rezgőmozgás jön létre, amely azonban nem harmonikus rezgés, mert az eredő erő a kitéréssel *nem* egyenesen arányos.

Az F_e eredő erő az y kitérés függvényében így adható meg:

$$F_e(y) = 1,8 \cdot 10^{-2} \frac{y}{(0,25 + y^2)^{3/2}}.$$

Zsebszámológép segítségével értéktáblázatot készíthetünk és ábrázolhatjuk is az eredő erőt (6. ábra). Látható, hogy viszonylag nagy kitérés-tartományban az erőfüggvény lineárisnak tekinthető, itt tehát harmonikus rezgést végezhet a test.

c) A sebesség a szélső helyzetekben zérus, az AB szakasz felezőpontjában pedig maximális, 3 m/s nagyságú. Az $y = 0$ értékhez tartozó eredő erő $F_e = 0$, itt a gyorsulás $a = 0$. A legnagyobb kitéréshez ($y = 0,277 \text{ m}$) tartozó eredő erő: $F_e^{\max} = 0,0267 \text{ N}$, és itt a legnagyobb a gyorsulás: $a_{\max} = F_e^{\max}/m = 26,7 \text{ m/s}^2$.

3. feladat. Egy ideális gázzal körfolyamatot végzünk. Az egyes részfolyamatokhoz tartozó hőkapacitások a következők:

1. részfolyamat: $T \rightarrow 4T$, a hozzá tartozó hőkapacitás 13 egység (nem állandó, hőmérsékleti átlagérték);
2. részfolyamat: $4T \rightarrow 2T$, a hozzá tartozó hőkapacitás 10 egység (állandó);
3. részfolyamat: $2T \rightarrow T$, a hozzá tartozó hőkapacitás 14 egység (állandó).

A részfolyamatok között van egy izochor és egy izobár.

a) Hány atomos a gáz?

b) Mekkora a körfolyamat hatásfoka?

c) Hányszorosa a gáz kezdeti T hőmérsékletétől a második részfolyamat $3T$ hőmérsékletéig végzett munkája az egész körfolyamat alatt végzett munkájának?

(Szvetnik Endre)

Megoldás. a) Mivel

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5},$$

$f = 5$ -nek kell lennie, tehát a gáz 2 atomos.

b) Az állandó nyomáshoz tartozó hőkapacitás minden ideális gáznál nagyobb, mint az állandó térfogathoz tartozó, így a második részfolyamat az izochor, a harmadik részfolyamat pedig az izobár. (Az első azért nem lehet izobár, noha nagyobb a második folyamat hőkapacitásánál, mert nem állandó érték.)

A $p-V$ állapotsíkon az első részfolyamat nem ábrázolható egyértelműen a hőkapacitás átlagértékének a részletekre vonatkozó információszegénysége miatt, a gázzal közölt hő azonban így is meghatározható. Mivel a körfolyamat során $\Delta E = 0$, a gáz által végzett munka a felvett hővel egyenlő. Az I. főtétel szerint: $\Delta E_b = Q_{\text{gázzal}} + W_{\text{gázon}} = 0$, azaz $W_{\text{gázon}} = -Q_{\text{gázzal}}$, és így $W_{\text{gáz}} \text{ által} = Q_{\text{gázzal}}$. Ezzel a hatások:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W_{\text{gáz által}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{Q_{\text{gázzal}}}{Q_{\text{fel}}} = \\ &= \frac{13 \cdot (4T - T) + 10 \cdot (2T - 4T) + 14 \cdot (T - 2T)}{13 \cdot (4T - T)} = \frac{5}{39} \approx 0,13 = 13\%. \end{aligned}$$

(Az $\eta = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$ összefüggésből is ez adódik, hiszen a negatív közölt hő nagysága a leadott hő.)

c) A gáz által végzett munkát az első főtételből határozzuk meg.

$$\Delta E_b = -W_{\text{gáz által}} + Q_{\text{gázzal}},$$

$$W_{\text{gáz által}} = Q_{\text{gázzal}} - \Delta E_b = \\ = 13 \frac{\text{egység}}{\text{K}} \cdot (4T - T) + 10 \frac{\text{egység}}{\text{K}} \cdot (3T - 4T) - 10 \frac{\text{egység}}{\text{K}} \cdot (3T - T) = 9 \frac{\text{egység}}{\text{K}} T.$$

Kihasználtuk, hogy $\Delta E_b = C_V \Delta T$ bármilyen folyamat esetén. A hatások meghatározásánál már meghatároztuk a gáz által az egész körfolyamat alatt végzett munkát: $W_{\text{gáz által}} = 5 \text{ egység} \cdot T$, tehát a kért hányszoros:

$$\frac{W_{\text{gáz által}(T \rightarrow 3T)}}{W_{\text{gáz által (kör)}}} = \frac{9T}{5T} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

A II. és III. kategória (valamennyi gimnazista) feladatai

1. feladat. Egy m tömegű, könnyen gördülő kiskocsihoz l hosszúságú, lazán lelógó fonalat kötöttünk, amelynek a másik vége egy $2m$ tömegű kiskocsihoz szerelt D irányú erejű csavarrugóhoz csatlakozik az ábra szerint. A rugó összenyomásra is működik és tengelye mindig egyenes marad. A $2m$ tömegű kocsit v_0 sebességgel meglökjük.

a) A fonál megfeszülésétől számítva mennyi idő múlva ér a hátsó kocsi a rugóhoz?

b) Mennyi idő múlva feszül meg ismét a fonál?

($m = 8 \text{ kg}$, $D = 23,3 \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$.)

(Holics László)

Megoldás. a) A fonál első megfeszülésétől első meglazulásáig tulajdonképpen egy „rugalmas ütközés” megy végbe (nem a szokásos rugalmas „tolás”, hanem rugalmas „rántás” formájában). Erre külső erők hiányában az impulzus, disszipatív erők hiányában pedig a mechanikai energia megmaradása érvényes.

Ez az ütközés egy fél harmonikus rezgésből áll. Térjünk át tömegközépponti koordináta-rendszerre! A fonál megfeszülése pillanatától az m_1 , illetve m_2 tömegű kiskocsi valamekkora t idő alatt Δx_1 , illetve Δx_2 utat tesz meg. A tömegközéppont mozgásának tétele alapján:

$$(1) \quad \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Ugyanakkor a rugó által (mindkét testre) kifejtett erő nagysága:

$$(2) \quad F = D(\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

(1)-ből Δx_2 -t kifejezve és (2)-be írva:

$$(3) \quad F = D \left(\Delta x_1 + \frac{m_1}{m_2} \Delta x_1 \right) = D \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Delta x_1 = D_1^* \Delta x_1.$$

Ezzel az m_1 tömegű (és hasonlóképpen szimmetrikusan az m_2 tömegű) kocsi fél rezgéseideje:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m_1}{D_1^*}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{D(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2m}{3D}} = \sqrt{\frac{16 \text{ kg}}{3 \cdot 23,3 \text{ N/m}}} = 1,5 \text{ s}.$$

Megjegyzés. Ugyanezt a számszerű eredményt kapjuk az m_2 tömeg kocsira is, amelyre $D_2^* = 3D$, míg $D_1^* = \frac{3}{2}D$ volt.

A két kocsi egymáshoz viszonyított (relatív) sebessége a félrezgés kezdetéig $v_{\text{rel}} = v_0 = 2 \text{ m/s}$ volt, így a félrezgés befejezésekor a szimmetria miatt ennek -1 -szerese, tehát a hátsó kocsinak a rugóval való ütközéséig még eltelik

$$t_2 = \frac{l}{v_0} = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 0,5 \text{ s}$$

idő. A fonál megfeszülésétől a rugóval való ütközésig tehát összesen $t = t_1 + t_2 = 1,5 \text{ s} + 0,5 \text{ s} = 2 \text{ s}$ telik el.

b) Mivel a folyamat tükrös (a rugó összenyomódásától ellazulásáig a periódusidő másik fele telik el,) és a relatív sebesség -1 -szerese a kezdeti értéknek, a fonál a kocsi rugóval való érintkezésétől számítva a fonál másodszori megfeszüléséig ugyancsak 2 s , a fonál első megfeszülésétől számítva pedig összesen 4 s idő telik el.

2. feladat. Egy téglalap alakú, homogén tömegeloszlású, elhanyagolható ellenállású zárt vezetőkeret egyik szimmetriatengelye körül foroghat. A keret homogén, síkjára merőleges, B indukciójú, időben állandó mágneses mezőben nyugszik és benne nem folyik áram. A keret egyik oldalát meglökjük és a keret forogni kezd. A keret területe A , önindukciós tényezője L . A tengely súrlódása elhanyagolható.

a) Hogyan változik a keretben folyó áram erőssége az elfordulás szögének függvényében?

b) Határozza meg, hogy a keret mely helyzetében maximális a mágneses mezőnek a keretre ható forgatónyomatéka! (Szegedi Ervin)

Megoldás. a) A megoldás egyik kulcsa, hogy a keret ellenállása elhanyagolható. Ez azt jelenti, hogy a keret anyagának belsejében az elektromos térerősség (makroszkópicusan értve) nulla, mert különben végtelen nagy áramnak kellene folynia. Alkalmazzuk Maxwell II. törvényét a keret mentén:

$$\sum \vec{E} \Delta \vec{s} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 0.$$

A keret által körülvevett teljes mágneses fluxus tehát nem változhat a mozgás során. Mivel a kezdeti fluxusérték $\Phi = B \cdot A$ volt, ezért ugyanennyi kell legyen a keret bármely helyzetében.

Egy φ szögű helyzetben a keret fluxusa egyrészt a B indukciójú mezőtől származik ($B \cdot A \cdot \cos \varphi$), másrészt a keretben indukálódott i áram által keltett mágneses tértől ($L \cdot i$). A teljes fluxus tehát: $B \cdot A \cdot \cos \varphi + L \cdot i$. A fluxus állandósága miatt azonban: $B \cdot A = B \cdot A \cdot \cos \varphi + L \cdot i$. Innen az áramerősség: $i = \frac{B \cdot A}{L}(1 - \cos \varphi)$. A maximális áramerősség $\cos \varphi = -1$ -nél, azaz $\varphi = \pi$ -nél adódik:

$$i_{\max} = \frac{2B \cdot A}{L}.$$

Megjegyzés. A $\varphi = \pi$ -nél létrejövő $i_{\max} \cdot L = 2B \cdot A$ összefüggés érthető is, hiszen a külső tértől származó fluxus (a keret átfordulása miatt) $-B \cdot A$, ezért a „saját” fluxusnak $+2B \cdot A$ -nak kell lennie, hogy a teljes fluxus $+B \cdot A$ maradjon.

b) A keretre mozgás közben $M(\varphi) = -B \cdot A \cdot i \cdot \sin \varphi$ forgatónyomaték hat. Felhasználva az áramerősségre kapott összefüggést, a forgatónyomaték így írható:

$$M(\varphi) = -\frac{(B \cdot A)^2}{L} \cdot \sin \varphi (1 - \cos \varphi).$$

A forgatónyomatékot vizsgálva látható, hogy 180° -os elfordulásig fékező nyomaték hat, ezt követően pedig átfordulást segítő. Megállapítható tehát, hogy a $\varphi = \pi$ helyzet a „holtpont”, ha a keret ezt a helyzetet (instabil egyensúlyi helyzet) eléri, akkor már túl is fordul. Az $M(\varphi)$ kifejezés szélsőértékeit megkaphatjuk, ha függvény néhány helyettesítési értékét zsebszámológéppel kiszámítjuk, és ezek alapján ábrázoljuk a függvényt. A 12. ábrán látható, hogy a „maximális fékező forgatónyomaték” a függvény minimumhelyénél, kb. 120° -nál lép fel.

Megjegyzés. A függvény szélsőértéke differenciálszámítással is megkereshető. A $\frac{dM}{d\varphi} = 0$ egyenlet megoldása megadja a minimum (és a maximum) helyét. Ez a feltétel a $2 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 1 = 0$ másodfokú egyenletre vezet, amelynek (számunkra lényeges) megoldása: $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, azaz $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad = 120° .

3. feladat. Egy henger belsejébe jó hővezető, rögzített fal p_0 nyomású, V_0 térfogatú, $T_0 = 280$ K hőmérsékletű héliumgázt zár be. A fal másik oldalán ugyancsak p_0 nyomású, V_0 térfogatú, T_0 hőmérsékletű héliumgáz van, amelyet egy dugattyú zár el a külső levegőtől. A henger és a dugattyú hőszigetelő anyagú és elhanyagolható hőkapacitású. A dugattyú lassú benyomásával a jobb oldali gázt $V_0/2$ térfogatra nyomjuk össze. Határozzuk meg ebben az állapotban a gázok hőmérsékletét!

(Szegedi Ervin)

Megoldás. A jó hővezető fal és a lassú benyomás biztosítja, hogy a két gáz hőmérséklete egymással mindig megegyezik. Közberső állapotban az állapothatározókat jelöljük az ábra szerint! Vizsgáljuk az összenyomás egy elemi részfolyamatát!

A teljes rendszerre felírt I. főtétel alapján (mivel $Q_{\text{összes}} = 0$):

$$\frac{f}{2} \cdot 2Nk\Delta T = -p\Delta V,$$

ami átrendezve ilyen alakot ölt:

$$(1) \quad \frac{2f}{2} Nk\Delta T = -p\Delta V.$$

Írjuk fel még a jobb oldali gáz állapotegyenletét is:

$$(2) \quad pV = NkT.$$

Vegyük észre, hogy az (1) és (2) egyenletek egy N részecskés, $2f$ szabadsági fokú ideális gáz adiabatikus állapotváltozásának egyenletei.

Megjegyzés. A bal oldali gáz termikus kölcsönhatása a jobb oldalival abban nyilvánul meg – a jobb oldali gáz szempontjából –, hogy megduplázódik a részecskék energiáiról szabadsági fokainak száma. Gondoljuk meg, hogy ez elég természetes, hiszen a gázok közötti energiaátadás miatt a munkával közölt energia fele akkora hőmérsékletváltozást okoz a jobb oldali gáznak, mint a tiszta adiabatikus kölcsönhatásban.

A vizsgált folyamatban tehát a jobb oldali gázra: $pV^\kappa = \text{állandó}$, vagy más alakban: $TV^\kappa = \text{állandó}$, ahol most

$$\kappa = \frac{2f+2}{2f} = \frac{f+1}{f}.$$

Héliumra $f = 3$, vagyis $\kappa = \frac{4}{3}$. A keresett hőmérséklet tehát:

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = T_0 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 1,26 T_0 = 352,8 \text{ K}.$$

A verseny végeredménye

I. kategória: 1. **Szénási Tamás** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., IV. o.t.), tanára: Beregszászi Zoltán; 2. **Brezniczky János** (Eger, Wigner Jenő Műszaki Informatikai Középiskola, IV. o.t.), tanára: Nagyné Fodor Zsuzsanna; 3. **Schieber András** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., IV. o.t.), tanára: Beregszászi Zoltán.

II. kategória: 1. **Kersch Péter** (Aszód, Petőfi S. Gimn., III. o.t.), tanárai: Kovács István, Kersch Gyula; 2. **Frenkel Péter** (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.), tanára: Horváth Gábor; 3. **Zawadowski Ádám** (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.), tanára: Horváth Gábor.

III. kategória: 1. **Kovács Gábor** (Sopron, Berzsenyi D. Evangélikus Líceum, IV. o.t.), tanárai: dr. Lang Jánosné, Piacsek István; 2. **Sexty Dénes** (Eger, Neumann J. Közgazd. Szki. és Gimn., IV. o.t.), tanára: Pecsénye Pálné; 3. **Nyakas Péter** (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o.t.), tanára: Vadvári Tibor.

Holics László





