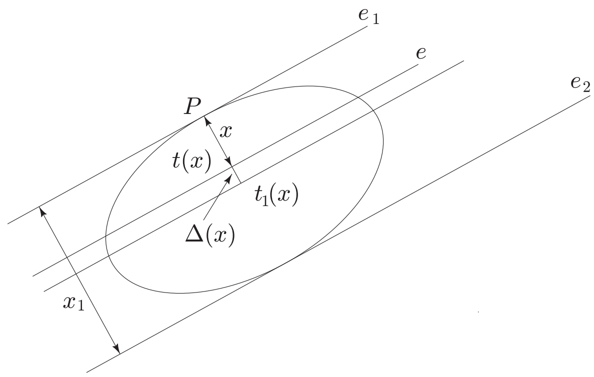
[1]

Az alábbi problémák megoldásához analízisből vett eszközöket használunk. Ezek a feladatok középiskolás diákok számára is hozzáférhetőek, és jelentősen mélyíthetik a függvény és a folytonosság fogalmát.

1. *Bizonyítsuk be, hogy bármely korlátos, konvex síkbeli alakzat adott irányú egyenessel két egyenlő területű részre vágható szét.*

Megoldás. Az *1. ábrán* e az adott iránnyal párhuzamos egyenes, e_1 és e_2 pedig ugyanilyen irányú támaszegyenesek. Legyen P az e_1 egyenes és a konvex alakzat közös pontja, P és e távolságát pedig jelöljük x-szel. Az e egyenes az alakzatot két részre vágja, legyen a két rész területe az ábra szerint $t(x)$ és $t_1(x)$. Feltehetjük, hogy $t(x) < t_1(x)$, azaz $t(x) - t_1(x) < 0$. Ha e_1 és e_2 távolsága x_1, akkor nyilván $t(x_1) - t_1(x_1) > 0$. Ezért, ha $t(x)$ és $t_1(x)$ x-nek folytonos függvényei, akkor Bolzano tétele[2] szerint az $(x; x_1)$ intervallumban van olyan x_0, amelyre $t(x_0) - t_1(x_0) = 0$, ami a feladat állítását jelenti. Megmutatjuk, hogy $t(x)$ (és $t_1(x)$) folytonos függvénye x-nek.



Ehhez definíció szerint azt kell belátnunk, hogy tetszőleges ε pozitív számhoz található olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Delta x < \delta$ esetén $|t(x + \Delta x) - t(x)| < \varepsilon$. A korlátosság feltétele szerint létezik olyan R sugarú kör, amely a konvex alakzatot magába foglalja. Ezért

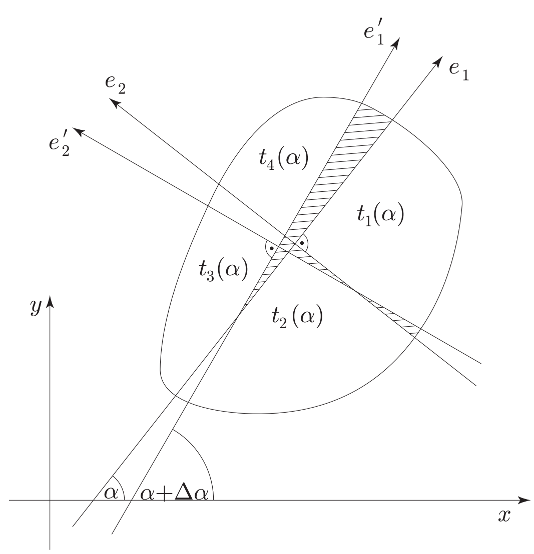
$$|t(x + \Delta x) - t(x)| \le 2R\Delta x < 2R\delta < \varepsilon,$$

ha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2R}$. ■

Feladat. Bizonyítandó, hogy a feladat állítása adott irányú egyenes helyett adott ponton átmenő egyenessel is érvényes.

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden korlátos, konvex síkbeli tartományhoz létezik két egymásra merőleges egyenes, amelyek a tartományt négy egyenlő területű részre vágják.*

Megoldás. Legyenek e_1 és e_2 a konvex halmaz területét felező egymásra merőleges (irányított) egyenesek. Ilyenek az előző feladat szerint léteznek. Jelöljük az e_1 és az x tengely szögét α-val, az e_1 és e_2 létrehozta négy síkrész területét $t_i(\alpha)$-val, és használjuk a *2. ábra* további jelöléseit is. Tekintve, hogy $t_1(\alpha) + t_2(\alpha)$, valamint $t_2(\alpha) + t_3(\alpha)$ is a konvex alakzat területének a fele, $t_1(\alpha) = t_3(\alpha)$, és hasonlóan $t_2(\alpha) = t_4(\alpha)$. Ezért a feladat állításának igazolásához elegendő megmutatni, hogy van olyan α_0 szög, amellyel $t_1(\alpha_0) = t_2(\alpha_0)$. Ha α már ilyen, akkor készen vagyunk. Egyéb esetben feltehetjük, hogy $t_1(\alpha) > t_2(\alpha)$, azaz $t_1(\alpha) - t_2(\alpha) > 0$. Forgassuk el e_1-et és e_2-t $90°$-kal úgy, hogy eközben mindig területfelező egyenesek maradjanak.



[1]A cikk megjelent a Polygon folyóirat 1992. májusi számában (115–123. o.)

[2]E tétel a következőt állítja: ha f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény, akkor ott f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti valós értéket felvesz.

Ekkor $t_1(\alpha+90^\circ)=t_4(\alpha)$, $t_2(\alpha+90^\circ)=t_1(\alpha)$, és így

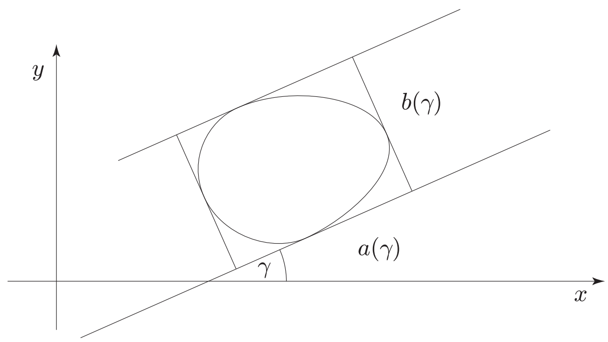
$$t_1(\alpha+90^\circ)-t_2(\alpha+90^\circ)=t_2(\alpha)-t_1(\alpha)<0.$$

Azt nyertük, hogy a $t_1(\alpha)-t_2(\alpha)$ függvény az $[\alpha;\alpha+90^\circ]$ intervallumban előjelet vált. Ezért, feltéve, hogy $t_1(\alpha)$ és $t_2(\alpha)$ folytonos, Bolzano tétele szerint létezik olyan α_0, amellyel $t_1(\alpha_0)=t_2(\alpha_0)$. Forgassuk el e_1-et és e_2-t egy $\Delta\alpha$ szöggel. Az elforgatott egyenesek e_1' és e_2', Megmutatjuk, hogy pl. $t_1(\alpha)$ folytonos. Ehhez meg kell becsülnünk $t_1(\alpha+\Delta\alpha)$ és $t_1(\alpha)$ különbségét. Az ábrán bevonalkázott területek mindegyike kisebb $\dfrac{(2R)^2\cdot\Delta\alpha}{2}$-nél, ahol R egy olyan kör sugara, amely magába foglalja a konvex alakzatot. Ilyen kör a korlátosság következtében létezik. Könnyen belátható, hogy

$$|t_1(\alpha+\Delta\alpha)-t_1(\alpha)|<4\frac{(2R^2)\cdot\Delta\alpha}{2}<\varepsilon,\qquad \text{ha}\quad \Delta\alpha<\frac{\varepsilon}{8R^2}<\delta,\quad \text{ahol}\quad \varepsilon>0.\blacksquare$$

3. *Bizonyítsuk be, hogy bármely korlátos síkbeli ponthalmaz belefoglalható egy négyzetbe úgy, hogy a négyzet mindegyik oldalán van az alakzat határának pontja.*

Megoldás. Először konvex tartományokra bizonyítjuk az állítást. Legyenek a konvex alakzat támasztéglalapjának oldalai $a(\gamma)$, $b(\gamma)$, ahol γ az a oldal egyenesének az x tengellyel bezárt szöge (*3. ábra*).



Itt fölhasználjuk azt a tényt, hogy korlátos síkbeli ponthalmaz belefoglalható két adott irányú támaszegyenes közötti sávba. Ha $a(\gamma)=b(\gamma)$, akkor a feladat állítása igaz. Tegyük fel ezután, hogy $a(\gamma)>b(\gamma)$, azaz $a(\gamma)-b(\gamma)>0$. Tekintsük a $\gamma+90^\circ$ szöghöz tartozó támasztéglalap oldalait:

$$a(\gamma+90^\circ)=b(\gamma);\quad b(\gamma+90^\circ)=a(\gamma).$$

Ezekből

$$a(\gamma+90^\circ)-b(\gamma+90^\circ)=b(\gamma)-a(\gamma)<0.$$

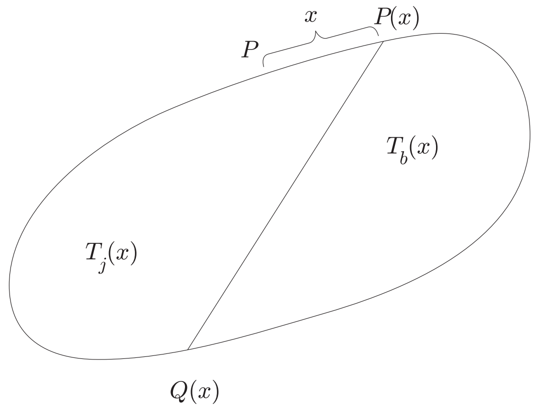
Ezért, ha $a(\gamma)$ és $b(\gamma)$ folytonos, akkor Bolzano tétele szerint a $[\gamma;\gamma+90^\circ]$ intervallumban létezik olyan γ_0 hely, amelyre $a(\gamma_0)-b(\gamma_0)=0$, tehát a támasztótéglalap négyzet.

Ha a ponthalmaz nem konvex, akkor konvex burkára létezik körülírt négyzet. Mivel egy alakzat konvex burka éppen a támaszegyenesei által meghatározott félsíkok közös része, a konvex burok minden támaszegyenese az eredeti alakzatnak is támaszegyenese. Ezért a konvex burok körülírt négyzete az eredeti alakzatnak is körülírt négyzete. $\blacksquare$

Feladat. Mutassuk meg, hogy $a(\gamma)$ és $b(\gamma)$ a γ-nak folytonos függvénye.

4. *Bizonyítandó, hogy a sík bármely korlátos, konvex halmazához található olyan egyenes, amely a konvex alakzat területét és határvonalát is felezi.*

Megoldás. Legyen a halmaz határvonalának hossza k. Legyen $P(x)$ az a pont, amelyre rögzített P és $P(x)$ közötti kisebbik kerület darab hossza x, ahol $0\le x\le\dfrac{k}{2}$. Legyen a $P(x)$-szel szemben levő pont $Q(x)$, ami azt jelenti, hogy a két pontot összekötő (irányított) egyenes a konvex halmaz határvonalát két egyenlő hosszú részre vágja. Ennek az egyenesnek a „jobb" oldalán lévő területrész legyen $T_j(x)$, a másik $T_b(x)$ (*4. ábra*). Ha $T_j(x)=T_b(x)$, akkor a feladat állítása igaz. Egyébként feltehető, hogy pl. $T_j(0)-T_b(0)>0$.



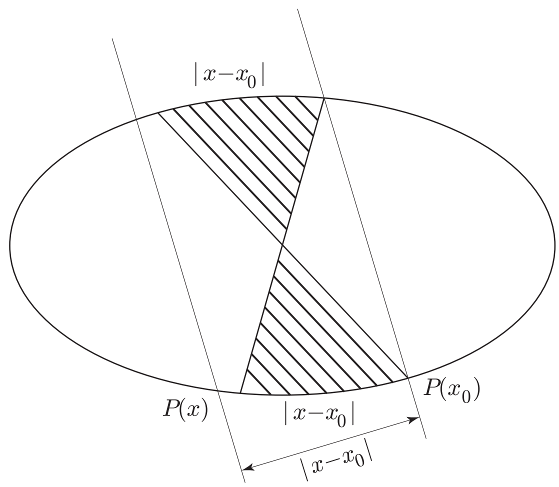
Mivel

$$T_j\left(\frac{k}{2}\right) = T_b(0) \text{ és } T_b\left(\frac{k}{2}\right) = T_j(0),$$

azért

$$T_j\left(\frac{k}{2}\right) - T_b\left(\frac{k}{2}\right) = T_b(0) - T_j(0) < 0.$$

Így, ha $T_j(x)$ és $T_b(x)$ x-nek folytonos függvényei, akkor Bolzano tétele szerint létezik olyan x_0, amelyre $T_j(x_0) - T_b(x_0) = 0$. Az x_0-hoz tartozó $P(x_0)$ és $Q(x_0)$ pontokat összekötő egyenes a konvex alakzat területét és kerületét is felezi.



Be kell még bizonyítanunk, hogy $T_j(x)$ (és $T_b(x)$ is) x-nek folytonos függvénye. Használjuk az *5. ábra* jelöléseit. A $P(x)$, $P(x_0)$ pontok és a velük szemköztiek belefoglalhatók egy $|x - x_0|$ szélességű és $2R$ hosszúságú téglalapba, ahol $|x-x_0|$ a $P(x)$ és $P(x_0)$ közötti kerület darab hossza, R pedig egy a konvex halmazt magába foglaló kör sugara. Mivel $T_j(x)$ megváltozása a bevonalkázott területek különbségeinek abszolút értéke, érvényes a következő becslés:

$$|T_j(x) - T_j(x_0)| < |x - x_0| \cdot 2R < \varepsilon,$$

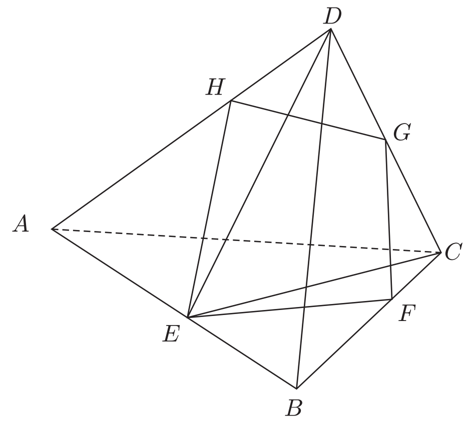
ha $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2R} = \delta$, ahol $\varepsilon > 0$. Tehát $T_j(x)$ valóban folytonos. ■

Megjegyzés. Ebben a feladatban – és az előbbiekben is – fölhasználtuk, hogy korlátos, konvex síkbeli alakzatnak van területe. Az 1. feladatban a konvexség feltétele csak a terület létezése miatt kellett. Ebben a feladatban fölhasználtuk azt is, hogy korlátos és zárt, konvex síkbeli alakzat határvonala mérhető.

5. *Van-e olyan sík, amely egy adott tetraédert két egyenlő felszínű és térfogatú részre vág szét?*

1. megoldás. Először bebizonyítjuk, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontján átmenő sík felezi a tetraéder térfogatát. Két esetet különböztetünk meg.

a) Legyen az $ABCD$ tetraéder AB élének felezőpontja E, a CD él felezőpontja pedig G (*6. ábra*). Az E és G pontokon átmenő CED sík a tetraédert két egyenlő térfogatú részre vágja. Ugyanis a CE súlyvonal felezi az ABC háromszög területét, ezért az $AECD$ és $EBCD$ tetraéderek AEC és EBC alapterülete megegyezik, továbbá egybeesik a D-ből húzható magasságuk is.



b) Forgassuk el a CED síkot az EG egyenes körül. Az elforgatott sík a tetraédert az $EFGH$ négyszögben metszi. Azt állítjuk, hogy az elforgatott sík is felezi a tetraéder térfogatát. Tekintsük az $EBCD$ tetraédert. Ebből az elforgatott sík egyrészt levágja az EFG alapú C csúcsú gúlát, másrészt hozzáveszi az EGH alapú D csúcsú gúlát. Mivel a tetraéder AD és BC éle egy-egy EG-vel párhuzamos síkba foglalható, az F és H pontok egyenlő távolságra vannak EG-től. Ezért az EFG és az EGH háromszögek területe egyenlő. Tekintve, hogy a G pont a CD él felezőpontja, a C és D pontoknak az $EFGH$ síktól való távolsága ugyanakkora, ezért az említett két gúla magassága is egyenlő, tehát térfogatuk egyenlő. Ez azt jelenti, hogy az elforgatott sík felezi a tetraéder térfogatát. A CED sík GE körüli forgatása közben pl. az F pont a DA szakaszon mozog A felé. Ha F egybeesik A-val, újra előáll a megoldás a) részében leírt helyzet. Ha az ABG síkot EG körül tovább forgatjuk, a megoldás b) részében leírtak ismétlődnek.

Tekintsünk ezután egy, a tetraéder térfogatát felező S síkot. A két résztest felszíne – a metszetlap területe nélkül – legyen $A_1(\gamma)$, illetve $A_2(\gamma)$, ahol γ S-nek és egy rögzített síknak a hajlásszöge. Ha $A_1(\gamma) = A_2(\gamma)$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel ezután, hogy $A_1(\gamma) > A_2(\gamma)$, azaz $A_1(\gamma) - A_2(\gamma) > 0$. Forgassuk el S-et a tetraéder két szemközti élének felezőpontját összekötő egyenes körül $180°$-kal. Ekkor $A_1(\gamma + 180°) = A_2(\gamma)$ és $A_2(\gamma + 180°) = A_1(\gamma)$, hiszen az S sík $180°$-os forgatás után önmagába megy át. Ezért

$$A_1(\gamma + 180°) - A_2(\gamma + 180°) = A_2(\gamma) - A_1(\gamma) < 0.$$

Feltéve, hogy $A_1(\gamma) - A_2(\gamma)$ folytonos, Bolzano tétele szerint lesz a $[0°; 180°]$ intervallumban olyan γ_0 szög, amelyre $A_1(\gamma_0) - A_2(\gamma_0) = 0$, tehát $A_1(\gamma_0) = A_2(\gamma_0)$. ■

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $A_1(\gamma)$ és $A_2(\gamma)$ γ-nak folytonos függvényei.

2. megoldás. A feladat elemi úton is megoldható. Az elemi megoldásnak további szépsége, hogy megad egy olyan síkot, amely a tetraéder felszínét és térfogatát is felezi, míg az első megoldásban csak létezést bizonyítottunk.

Legyen a V térfogatú, A felszínű tetraéder beírt gömbjének középpontja O. Az O pontot a csúcsokkal összekötve a tetraédert olyan gúlákra bonthatjuk, amelyek alapterülete a tetraéder egy-egy lapja, magassága pedig a beírt gömb r sugara. Ezeknek a gúláknak a térfogatát összeadva a tetraéder térfogatát kapjuk. Ezért $V = \dfrac{A \cdot r}{3}$. Vegyünk fel ezután egy O-n átmenő tetszőleges síkot. Ez a sík a tetraédert egy V_1, illetve V_2 térfogatú részre vágja, legyen a V_1 térfogatú testhez tartozó felszínrész A_1, a másik A_2. A szóban forgó sík az előbb említett gúlák némelyikét nem metszi, másokat pedig két O csúcsú gúlára vág szét, ezért $V_1 = \dfrac{A_1 \cdot r}{3}$ és $V_2 = \dfrac{A_2 \cdot r}{3}$.

Az 1. megoldásban bebizonyítottuk, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontján átmenő sík felezi a tetraéder térfogatát. Tekintsük azt a síkot, amely két szemközti él felezőpontján és az O ponton megy át. Ez a sík felezi a tetraéder térfogatát, azaz $V_1 = V_2$, ezért az előbbi képletekből $A_1 = A_2$. ■

6. *Bizonyítsuk be, hogy a tér bármely korlátos, konvex halmazához található olyan sík, amely a test térfogatát és felszínét is felezi.*

Megoldás. A feladat megoldását az Olvasóra bízzuk. Mutassuk meg, hogy a tér egy adott egyenesén átmenő síkok bármelyikéhez található vele párhuzamos sík, amely a korlátos, konvex halmazt két egyenlő térfogatú részre vágja. Egy ilyen sík és a $180°$-os elforgatottja egybeesik. (Mindig csak olyan síkokat tekintünk, amelyek az adott egyenesre illeszkedő síksor valamelyik elemével párhuzamosak.) A $[0°; 180°]$ intervallumban lesz olyan szög, amellyel egy, a térfogatot felező síkot elforgatva, az elforgatott sík a felszínt is felezi. Végül meg kell mutatni, hogy a felszín a forgatás szögének folytonos függvénye.

Bogdán Zoltán