1. Legyen a 30°-os szöggel szemközti oldal x hosszúságú. Ekkor szinusztétellel $\dfrac{x}{14-x}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}$, $x\approx 4,86$, $14-x=9,14$ egység. A 80°-os szöggel szemközti oldal szintén szinusztétellel számítható ki, $y=9,57$ egység. A háromszög területe $T=21,87$ területegység, a háromszög köré írható kör sugara $r=x=4,86$ egység, a háromszög beírt körének sugara $\varrho=\dfrac{T}{s}=1,86$ egység, ahol s a háromszög kerületének a fele.

2. A feltétel szerint $a_1=30$, $d=-3$ és $8a_n=S_{n-1}$, azaz

$$8(30+(n-1)(-3))=\frac{n-1}{2}(60+(n-2)(-3)),$$

ahonnan $n^2-39n+198=0$, azaz $n=6$ vagy $n=33$.

Így $a_6=30+5\cdot(-3)=15$ és $a_{33}=30+32(-3)=-66$.

3. A trapéz magassága $m=4\sqrt{3}\sin 60^\circ=6$ egység. A C ponton át az AD-vel párhuzamos egyenes az AB egyenest E pontban metszi. Legyen $EB=x$. A CEB háromszögben a koszinusztétel alkalmazásával $40=48+x^2-2\cdot 4\sqrt{3}\cdot x\cdot\cos 60^\circ$, ahonnan $x^2-4\sqrt{3}x+8=0$, $x_1=2\sqrt{3}+2$, $x_2=2\sqrt{3}-2$ egység. A feltételeknek két trapéz felel meg, ezekben $(AB)_1=10+2\sqrt{3}$, $(AB)_2=6+2\sqrt{3}$ egység, így a területek: $T_1=54+6\sqrt{3}$, illetve $T_2=42+6\sqrt{3}$ területegység.

4. A második egyenletből $y=-4x$ vagy $x-y=-20$. Ha $y=-4x$, akkor $2\sqrt{\dfrac{5x}{5x}}+\sqrt{\dfrac{5x}{5x}}=3$, azaz minden 0-tól különböző x szám megoldás, tehát ekkor az $x=t$, $y=-4t$, $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ számpárok a megoldások.

Ha $x-y=-20$, akkor $2\sqrt{\dfrac{5x}{-20}}+\sqrt{\dfrac{-20}{5x}}=3$, ahonnan $x_1=-4$, $x_2=-1$, így $y_1=16$, $y_2=19$. Ez a két számpár is megoldás. (Az $(x_1,\ y_1)$ számpár közte van az előbb kapott végtelen sok számpár között.)

5. A szinusztétel, majd a $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$ és a $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ azonosságok alkalmazásával, felhasználva, hogy $\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\neq 0$, adódik, hogy

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

(Az állítást geometriai ábra segítségével is igazolhatjuk.)

6. Az $r=4\sqrt{2}$ egység sugarú körben a 8 egység hosszú húrok a középponttól $d=4$ egység távolságra vannak. (Ezért az $x=0$ egyenletű egyenes megoldás.) Minden olyan egyenes egyenlete, amely átmegy az origón, $Ax+By=0$ alakban írható ($A^2+B^2>0$). A kör $(4;8)$ középpontja a keresett egyenestől 4 egység távolságra van, tehát

$$4=\frac{|4A+8B|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

amiből $\sqrt{A^2+B^2}=|A+2B|$, $\;B(3B+4A)=0$.

Ha $B=0$, akkor $A=1$ megfelel, így $x=0$ a keresett egyenes, és a metszéspontok $P_1(0;4)$, $P_2(0;12)$.

Ha $3B+4A=0$, akkor $A=3$, $B=-4$ megfelel, a keresett egyenes egyenlete $3x-4y=0$, a metszéspontok

$$P_3\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right),\qquad P_2\left(\frac{48}{5};\frac{36}{5}\right).$$

(A feladat sokféle módon, így trigonometria alkalmazásával is egyszerűen megoldható. Hogyan?)

7. Alkalmazhatjuk a

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

és a

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x),\quad\text{majd}\quad\cos^2 2x=1-\sin^2 2x$$

azonosságokat. Rendezés után a $\sin^2 2x-2\sin 2x-2-2a=0$, azaz a $(\sin 2x-1)^2=3+2a$ egyenletet kapjuk. Ennek akkor van megoldása, ha $0\le 3+2a\le 4$, azaz ha $-\dfrac{3}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$.

Ha $a=-\dfrac{3}{2}$, akkor $\sin 2x=1$, $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, ha $a=\dfrac{1}{2}$, akkor $\sin 2x=-1$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

8. Legyen x a P pont távolsága az e egyenestől, ekkor $0\le x\le 4\sqrt{2}$. Az ABP és a CDP háromszögek hasonlósága folytán $\dfrac{DC}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{x}-x$, azaz $DC=3\sqrt{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}-x}{x}$.

A szóbanforgó két háromszög területének összege

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2}x + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2}\frac{(4\sqrt{2} - x)^2}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(2x + \frac{32}{x}\right) - 24,$$

ahol $0 \leq x \leq 4\sqrt{2}$. Tudjuk, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A = B$. Most $2x + \frac{32}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{2x \cdot \frac{32}{x}} = 16$ és $2x = \frac{32}{x}$, ha $x = 4$.

Így $T \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 16 - 24 = 24(\sqrt{2} - 1)$. A legkisebb területösszeg $T_{\min} = 24(\sqrt{2} - 1)$ területegység, és akkor a P pont $x = 4$ $(0 < 4 < 4\sqrt{2})$ távolságra van az e egyenestől.

Rábai Imre